Universidad Técnica
Federico Santa María
Departamento de Matemática

MAT 270 Análisis Numérico para ingeniería civil

Demostrativo en
Clase 16 y 18 Abril 2019.
Profesor Jaime Figueroa Nieto

Polinomios de Legendre

Tabla de polinomios de Legendre de grado 0 hasta grado 10

In[1]:=
```
Table[p[k] = LegendreP[k, x], {k, 0, 10}]
```
tabla P de Legendre

Out[1]=
$$\left\{1,\ x,\ \frac{1}{2}\left(-1+3x^2\right),\ \frac{1}{2}\left(-3x+5x^3\right),\ \frac{1}{8}\left(3-30x^2+35x^4\right),\right.$$
$$\frac{1}{8}\left(15x-70x^3+63x^5\right),\ \frac{1}{16}\left(-5+105x^2-315x^4+231x^6\right),$$
$$\frac{1}{16}\left(-35x+315x^3-693x^5+429x^7\right),\ \frac{1}{128}\left(35-1260x^2+6930x^4-12012x^6+6435x^8\right),$$
$$\frac{1}{128}\left(315x-4620x^3+18018x^5-25740x^7+12155x^9\right),$$
$$\left.\frac{1}{256}\left(-63+3465x^2-30030x^4+90090x^6-109395x^8+46189x^{10}\right)\right\}$$

La principal propiedad es la de ser “ortogonales dos a dos”, esto es:
$\int_{-1}^{1} p(i)\, p(j)\, dx = 0$ si $i \neq j$

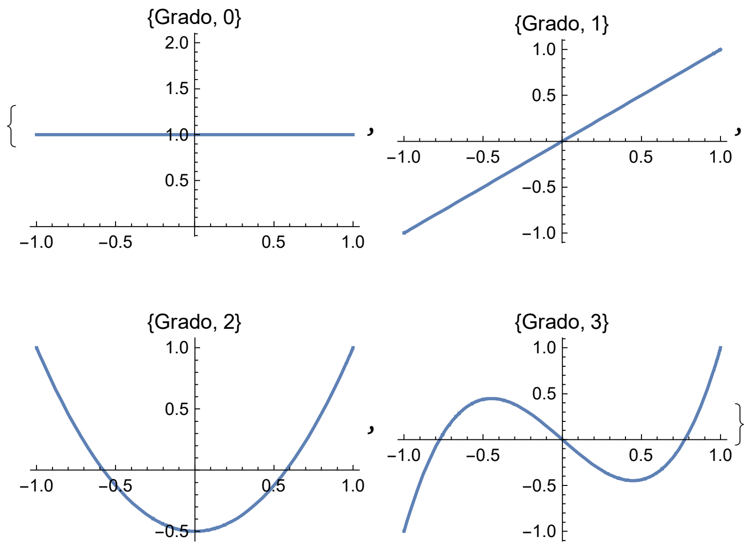
In[11]:=
```
Table[Integrate[p[k] p[j], {x, -1, 1}], {k, 0, 5}, {j, 0, 5}]
```
tabla integra

Out[11]=
$$\left\{\{2,0,0,0,0,0\},\ \left\{0,\frac{2}{3},0,0,0,0\right\},\ \left\{0,0,\frac{2}{5},0,0,0\right\},\right.$$
$$\left.\left\{0,0,0,\frac{2}{7},0,0\right\},\ \left\{0,0,0,0,\frac{2}{9},0\right\},\ \left\{0,0,0,0,0,\frac{2}{11}\right\}\right\}$$

Trazado de los polinomios hasta el grado 3

In[2]:=
```
Table[Plot[p[k], {x, -1, 1}, PlotLabel → {Grado, k}], {k, 0, 3}]
```
tabla | representación gráfica | etiqueta de representación

Out[2]=



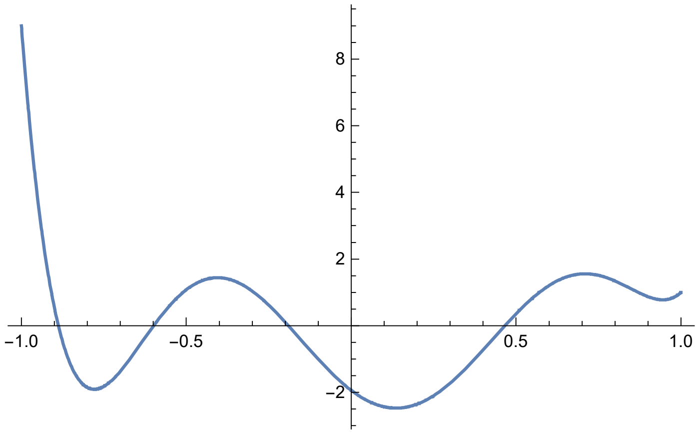
El siguiente polinomio se genera en la base de Legendre.
¿Como recuperar los coeficientes o amplitudes 2 , - 4 , 3 ?

In[12]:=
```
f = 2 p[2] - 4 p[5] + 3 p[6] // Expand
```
expande

```
Plot[f, {x, -1, 1}]
```
representación gráfica

Out[12]= $-\frac{31}{16}-\frac{15\,x}{2}+\frac{363\,x^2}{16}+35\,x^3-\frac{945\,x^4}{16}-\frac{63\,x^5}{2}+\frac{693\,x^6}{16}$

Out[13]=



Primero se ven cuales polinomios participan. Los que tienen producto interno no nulo.

In[14]:=
```
Table[Integrate[f p[i], {x, -1, 1}], {i, 0, 7}]
```
tabla | integra

Out[14]= $\left\{0, 0, \frac{4}{5}, 0, 0, -\frac{8}{11}, \frac{6}{13}, 0\right\}$

Enseguida se calculan las amplitudes dividiendo por la norma al cuadrado de p(i):

In[15]:=
```
Table[Integrate[f p[i], {x, -1, 1}] / (2 / (2 i + 1)), {i, 2, 6}]
```
tabla | integra

Out[15]= {2, 0, 0, -4, 3}

Polinomios de Chebyshev

Tabla de polinomios de Chebyshev hasta el grado 8

In[21]:=
```
Table[q[k] = ChebyshevT[ k , x], {k, 2, 8}]
```
tabla   T de Chebyshev

Out[21]= $\{-1+2x^2, -3x+4x^3, 1-8x^2+8x^4, 5x-20x^3+16x^5, -1+18x^2-48x^4+32x^6, -7x+56x^3-112x^5+64x^7, 1-32x^2+160x^4-256x^6+128x^8\}$

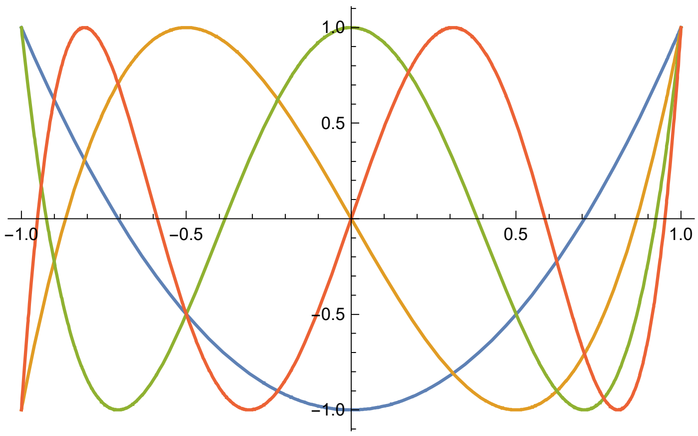
Son “ortogonales dos a dos” con peso: $1/\sqrt{1-x^2}$

In[32]:=
```
Table[ Integrate[ 1 / Sqrt[1 - x^2] q[i] q[j], {x, -1, 1}], {i, 2, 5}, {j, 2, 5}]
```
tabla   integra   raíz cuadrada

Out[32]= $\left\{\left\{\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0\right\}, \left\{0, \frac{\pi}{2}, 0, 0\right\}, \left\{0, 0, \frac{\pi}{2}, 0\right\}, \left\{0, 0, 0, \frac{\pi}{2}\right\}\right\}$

Se grafican todos esos polinomios en el cuadrado [-1,1] x [-1,1]. Todas son ondas cosenoidales.

In[19]:=
```
Plot[%, {x, -1, 1}]
```
representación gráfica

Out[19]=


In[9]:=

Ejercicio:

Expanda el polinomio   f = 2 T(2) - 3 T(4) + 4 T(6). Enseguida, a partir del polinomio expandido, detecte cuales son los grados de los polinomios de Chebyshev involucrados. Después calcule las amplitudes 2 , -3 , 4 .

Aproximación Legendre

Considere una barra metálica curva y delgada situada en el plano XY ocupando la curva: $y = x(1-x)$, cuya densidad es variable: $d(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$, $0 \le x \le 1$.

La función que establece su masa medida desde $x = 0$ es $m(x) = \int_0^x f(u)\, du$ donde:

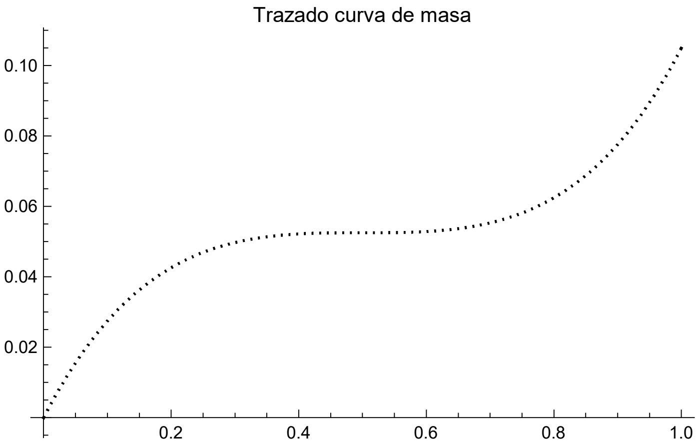
$f(u) = d(u)\sqrt{1 + (y'(u))^2}$, $0 \le u \le 1$.

In[292]:=
```
Clear[f]
dy = D[x (1 - x), x]
f = (x - 1 / 2) ^2 Sqrt[1 + dy^2]
ma[u_] := NIntegrate[f, {x, 0, u}]
orig = Plot[ma[u], {u, 0, 1},
  PlotStyle → {Black, Dashing[Tiny]}, PlotLabel → "Trazado curva de masa" ]
```
borra · deriva · raíz cuadrada · integra numéricamente · representación gráfica · negro · especifi··· · tamaño ··· · etiqueta de representación

Out[293]= $1 - 2x$

Out[294]= $\sqrt{1 + (1 - 2x)^2}\left(-\frac{1}{2} + x\right)^2$

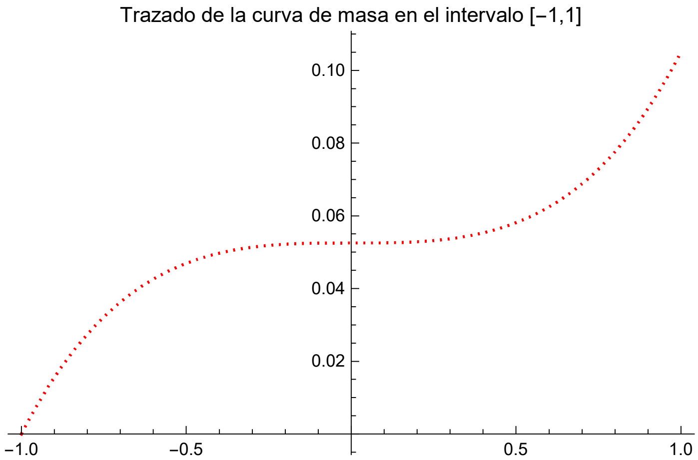
Out[296]=



Cambio de variable de integración.

In[297]:=
```
cam := ma[(t + 1) / 2]
orig = Plot[cam, {t, -1, 1}, PlotStyle → {Red, Dashing[Tiny]},
  PlotLabel → "Trazado de la curva de masa en el intervalo [-1,1]"]
```
representación gráfica · estilo de repre··· · rojo · especifi··· · tamaño minúsculo · etiqueta de representación

Out[298]=



In[266]:=
```
Print["Para calcular los coeficientes de Fourier"]
escribe                                  transformada de Fourier discreta
co = Table[
   tabla
  Print[" con ", nn = 10 (km + 1), "  intervalos"];
  escribe
  d = Table[aux = 1 / (2 nn) i - 1;
     tabla
     {aux, (p[km] /. {t -> aux}) ma[(aux + 1) / 2]}, {i, 0, 4 nn}] // N;
                                                            valor numérico
  s[k_] := 1 / 3 (d[[2 k + 1, 2]] + 4 d[[2 k + 2, 2]] + d[[2 k + 3, 2]]);
  1 / (2 nn) Sum[ s[k], {k, 0, 2 nn - 1}] // N, {km, 0, 6}]
             suma                         valor numérico
```

```
Para calcular los coeficientes de Fourier
 con 10  intervalos
 con 20  intervalos
 con 30  intervalos
 con 40  intervalos
 con 50  intervalos
 con 60  intervalos
 con 70  intervalos
```

Out[267]= $\{0.10504, 0.0198541, -2.0331\times 10^{-15}, 0.00614589, 6.12714\times 10^{-10}, 0.000230741, 1.9139\times 10^{-9}\}$

In[299]:=
```
Table[ p[k] = LegendreP[k, t], {k, 0, 6}]
tabla        P de Legendre
```

Out[299]= $\left\{1, t, \frac{1}{2}\left(-1+3t^2\right), \frac{1}{2}\left(-3t+5t^3\right), \frac{1}{8}\left(3-30t^2+35t^4\right), \frac{1}{8}\left(15t-70t^3+63t^5\right), \frac{1}{16}\left(-5+105t^2-315t^4+231t^6\right)\right\}$

In[328]:=
```
pol = co[[1]] / 2;
Table[i = k;
tabla
 pol = pol + co[[i]] / (2 / (2 i - 1)) p[i - 1];
 Print[{"Aprox grado", k - 1, " = ", pol}];
 escribe
 apro = Plot[pol, {t, -1, 1}, PlotLabel → {Aproximación grado, k - 1}];
        representación gráfica  etiqueta de representación
 Show[apro, orig], {k, 2, 6}]
 muestra
```

$\{\text{Aprox grado}, 1, = , 0.0525198 + 0.0297812\, t\}$

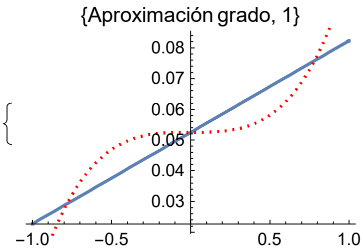
$\{\text{Aprox grado}, 2, = , 0.0525198 + 0.0297812\, t - 2.54137 \times 10^{-15} (-1 + 3 t^2)\}$

$\{\text{Aprox grado}, 3, = , 0.0525198 + 0.0297812\, t - 2.54137 \times 10^{-15} (-1 + 3 t^2) + 0.0107553 (-3 t + 5 t^3)\}$

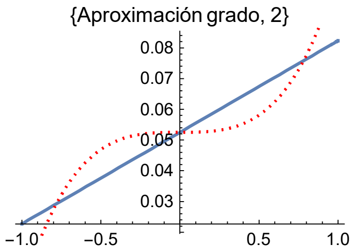
$\{\text{Aprox grado}, 4, = , 0.0525198 + 0.0297812\, t - 2.54137 \times 10^{-15} (-1 + 3 t^2) + 0.0107553 (-3 t + 5 t^3) + 3.44651 \times 10^{-10} (3 - 30 t^2 + 35 t^4)\}$

$\{\text{Aprox grado}, 5, = , 0.0525198 + 0.0297812\, t - 2.54137 \times 10^{-15} (-1 + 3 t^2) + 0.0107553 (-3 t + 5 t^3) + 3.44651 \times 10^{-10} (3 - 30 t^2 + 35 t^4) + 0.000158634 (15 t - 70 t^3 + 63 t^5)\}$

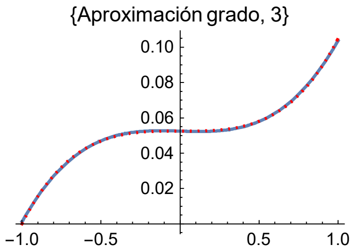
Out[329]= {



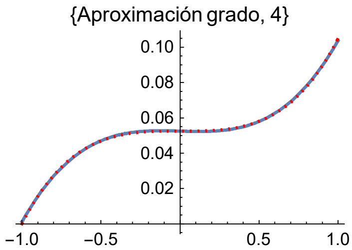
,



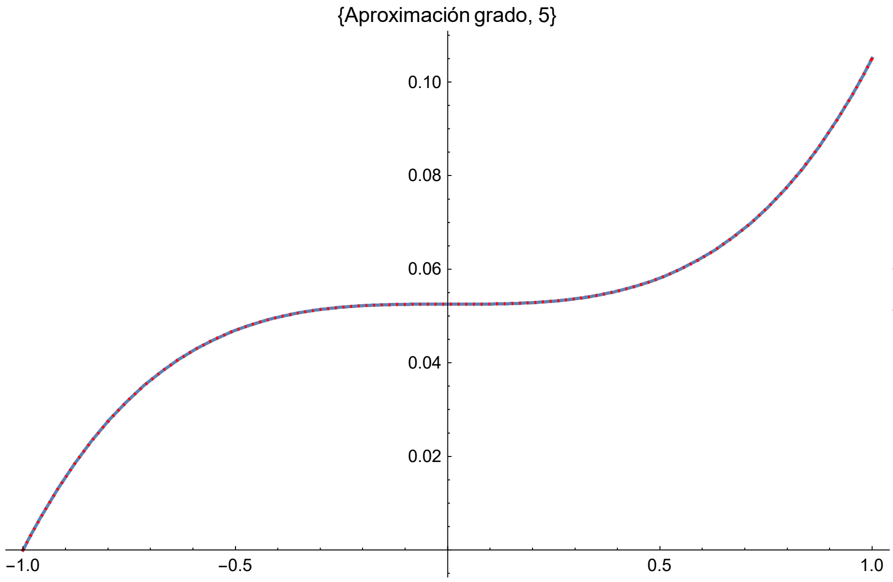
,



,



,



}