Ayudantía 2: Interpolación continua de Lagrange, Newton. Diferencias avanzadas.

Problema 1

El cálculo de la masa de un barra delgada ubicada en el intervalo $[1, 3]$ consiste en integrar la densidad variable $\delta(x)$ en $[1, 3]$.

1. Calcular la densidad variable $\delta(x)$ por interpolación utilizando datos de la tabla 1. Concretamente calcule el interpolante en las abscisas x_1, x_2, x_3 del intervalo $[1, 3]$ definidas en (1).

2. Estimar el error de interpolación si se sabe que la cotas de las derivadas de $\delta(x)$ son:

$$|\delta^{(k)}(x)| \leq 0.25(k-1), \quad x \in [1,3], \quad k = 2,3,4$$

Definición

Para $i = 1, 2, 3, \quad x_i = \phi(y_i)$ en que $y_i = \cos\left(\frac{2i-1}{6}\pi\right)$,

$$\phi : [-1,1] \to [1,3] \quad \phi(y) = \frac{1}{2}(2y+4) \tag{1}$$

x_i	1.09883	1.13397	1.26962	1.36555	1.37367	2.00000	2.62274	2.86603
$\delta(x_i)$	0.476457	0.468609	0.440602	0.422735	0.421289	0.333333	0.276034	0.258664

Tabla 1: Densidad en distintos puntos x_i.

Problema 2

Considere la curva $r(t) = (\cos(t), \sin(2t), t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ y el campo de velocidades $\vec{F}(x, y, z) = (xy, y, yz)$. El flujo a lo largo de la curva r desde $t = 0$ a $t = u$, $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, está dada por $C(u) = \int_0^u \vec{F} \cdot d\vec{r}$ alguno de cuyos valores se dan en la siguiente tabla.

u	0.0000	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	1.5182	1.1316	1.1781	1.02	0.838
$C(u)$	0.0000	0.1253	0.3838	0.5537	-0.1596	-0.0481	-0.0674	-0.0077	0.0109

1. Interpole C mediante un polinomio cúbico en $[0, \frac{\pi}{4}]$ usando diferencias avanzadas.

2. Interpole C en los tres nodos de Chebyshev en $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

3. Si $C^{(3)}(u)$ está acotada por 14.5 en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ estimar una cota para la interpolación realizada en el item anterior en el intervalo $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

Problema 3

Considere la función que la masa de un metal rectilineo curvo plano de desnsidad de masa variable $M(x) = \int_0^x \sqrt{t+1}\sqrt{(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2}dt$ en que $x \in [0, 2\pi]$ donde $\alpha(t) = 2\sin(t)$ y $\beta(t) = 2\cos(t)$.

Considere el subintervalo $[a, b]$ de $[0, 2\pi]$ donde $a = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ y $b = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$. Observe que $[a, b] \approx [2.61799, 3.66519]$. Las coas de las derivadas de $M(x)$ para $x \in [a, b]$ son:

$$|M^{(i)}(x)| \leq C_i, \quad i = 2, 3, 4$$

donde $C_2 \approx 2.21108$, $C_3 \approx 3.56568$, $C_4 \approx 5.06159$. Sea $\phi_n(x) = \Pi_{j=0}^n (x - x_j)$ en que $a \leq x_0 \leq ... \leq x_n \leq b$ y sea $|\phi_m(x)| \leq D_n$, $n = 2, 3, 4, 5$. Se ha calculado que para $x_0 \approx 2.68814$, $x_1 \approx 3.14159$, $x_2 \approx 3.5950$, entonces $D_2 \approx 0.0358869$, además $M(x_0) \approx 9.83711$; $M(x_1) \approx 12.479$; $M(x_3) \approx 15.2684$

1. Calcular la cota D_2 correspondiente a puntos equiespaciados $Z_i = a + i \cdot h$ en que $i = 0, 1, 2$ y $h = \frac{b-a}{2}$. Calcular la estimación del error de interpolación en $[a, b]$ para este conjunto de puntos y para el que se dio más arriba. Establezca cuál es la menor estimación.

2. Interpolar la función de masa $M(x)$ en $[a, b]$ con el primer conjunto de puntos dados y aproxime $M(z)$ con $z = \frac{16\pi}{15}$.