Problema 1.

La siguiente integral habría sido calculada por Friedrich Gauss: $\int_0^1 x^{100}e^{x-1}dx$ de la manera que se señala.

Si se define $s_k = \int_0^1 x^k e^{x-1}dx$, $k = 0, 1, ..., 100$ y se integra por partes se deduce la fórmula recursiva: $s_k = 1 - ks_{k-1}$ para $k \geq 1$. Para calcular cualquiera de las integrales bastaría entonces tener $s_0 = 1 - \frac{1}{e}$.

(a) **(10 pts.)** Se deduce que $s_k = c_k + (-1)^k k! s_0$. Calcule la constante c_k en el caso de $k = 3$.

(b) **(10 pts.)** Teniendo en cuenta que s_0 tendrá que ser ingresado con error, consideremos para k fijo, s_k como función de s_0. Concretamente suponga que $\hat{s}_0 = s_0 + \Delta s$ y obtenga una expresión del error absoluto de s_k, para el error relativo y establezca el factor de condicionamiento para s_0.

(c) **(5 pts.)** Para $k = 3$, calcule las expresiones obtenidas en b) si $|\Delta s| = 0.002$, $s_0 = 0.63$.

Problema 2.

(i) **(10 pts.)** Se dispone de los siguientes datos sacados obtenidos de un polinomio $f(x)$ de grado menor o igual a 5. Averiguar de qué grado es, sin obtener el polinomio. (Sugerencia: utilice la forma de Newton del polinomio de interpolación)

x_i	-2	-1	0	1	2	3
$f(x_i)$	-5	1	1	1	7	25

Solución problema (1):

(a) Notemos que, dada la recurrencia, se cumple la siguinte relación para la sucesión

$$\begin{aligned} s_3 &= 1 - 3s_2 \\ &= 1 - 3(1 - 2s_1) = 1 - 3 + (3 \times 2)s_1 \\ &= 1 - 3 + 6 - (3 \times 2 \times 1)s_0 \\ &= 4 + (-1)^3 3! s_0. \end{aligned}$$

Luego, se tiene que $c_3 = 4$.

(b) Si $k \geq 1$ y la variable $\hat{s}_0 = s_0 + \Delta s$, donde Δs denota el error absoluto de s_0, luego se tiene que el error absoluto de s_k, el cual denotamos por e_{A,s_k}, es

$$e_{A,s_k} = \left| \frac{\partial s_k}{\partial s_0}(s_0) \right| \Delta s = k! \Delta s.$$

De forma similar, si denotamos por e_{R,s_0} como el error relativo de la variable s_0, luego el error relativo de s_k, el cual denotamos por e_{R,s_k}, es

$$e_{R,s_k} = \frac{e_{A,s_k}}{|s_k(s_0)|} = \frac{k!}{|c_k + (-1)^k k! s_0|} \Delta s.$$

Ahora, de la expresión anterior, se tiene que

$$e_{R,s_k} = \frac{e_{A,s_k}}{|s_k(s_0)|} = \frac{k!}{|c_k + (-1)^k k! s_0|} \Delta s = \left(\frac{k! |s_0|}{|c_k + (-1)^k k! s_0|} \right) \frac{\Delta s}{|s_0|} = \mathfrak{K} e_{R,s_0},$$

luego, el factor de condicionamiento $\mathfrak{K}$, es

$$\mathfrak{K} = \frac{k! |s_0|}{|c_k + (-1)^k k! \hat{s}_0|}.$$

(c) Si $\hat{s}_0 = 0.63 \pm 0.002$, luego $\hat{s}_0 = 0.63$ y $\Delta s = 0.002$. Luego,

$$\begin{aligned} e_{A,s_3} &= 3! e_{A,s_0} = 6 \times 0.002 = 0.012, \\ e_{R,s_3} &= \frac{3!}{1 - 3 + 3! - 3! \times 0.63} \times 0.012 = 0.3272, \\ \mathfrak{K} &= \frac{3! \times 0.63}{1 - 3 + 3! - 3! \times 0.63} = 17.18. \end{aligned}$$

Solución problema (2):

Usando diferencias divididas, se puede construir la siguiente tabla

x	$f(x)$	$f[x_i; x_{i+1}]$	$f[x_i; ...; x_{i+2}]$	$f[x_i; ...; x_{i+3}]$	$f[x_i; ...; x_{i+4}]$	$f[x_i; ...; x_{i+5}]$
-2	-5					
		6				
-1	1		-3			
		0		1		
0	1		0		0	
		0		1		0
1	1		3		0	
		6		1		
2	7		6			
		18				
3	25					

Ahora, como sabemos que el polinomio interpolante $p_N(x)$ corresponde a

$$\begin{aligned}
p_N(x) = {} & f(x_0) + f[x_0; x_1](x - x_0) + f[x_0; x_1; x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
& + f[x_0; x_1; x_2; x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
& + f[x_0; x_1; x_2; x_3; x_4](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\
& + f[x_0; x_1; x_2; x_3; x_4; x_5](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4),
\end{aligned}$$

luego de la tabla claramente resulta en un polinomio de grado a lo más 3.