Ayudantía 1: Teoría del error, buen condicionamiento, interpolación continua, nodos de Chebyshev.

Problema 1

Sea $r \in \mathbb{R}$. Considere $y = f(x)$, donde $f(x) = (x - r)^2$.

1. Para $x \neq r$ establezca el factor de condicionamiento de y con respecto a x.
2. Sea $r = 0$ y le error relativo en x es 0.1, ¿qué error relativo se puede eseperar en y según 1?
3. Si $r = 0$, $x = 0.1$, $\bar{x} = x + \Delta x$ con $\Delta x = 0.01$ ¿cuál es el error relativo en x y cuál es el error relativo en y?

Problema 2

Considere la función de tres variables:

$$w(a, s, c) = \int_a^s f(t, c)dt$$

que representa el trabajo que realiza una fuerza $\vec{F}$ por una trayectoria $\vec{r}(t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Para esa función se examinan los valores en torno del punto $P(a = \frac{\pi}{4}, s = \frac{\pi}{3}, c = 2)$, haciendo variar solo un dato, manteniendo los otros dos fijos. Para $\epsilon = 1$, se observó lo siguiente:

- w varía de 0.45 a 0.24 si solo varía $a \in [\frac{\pi}{4} - \epsilon, \frac{\pi}{4} + \epsilon]$
- w varía de 0.2 a 0.5 si solo varía $s \in [\frac{\pi}{3} - \epsilon, \frac{\pi}{3} + \epsilon]$
- w varía de 0.33 a 0.39 si solo varía $c \in [2 - \epsilon, 2 + \epsilon]$

A partir de lo observado se plantean las siguientes interrogantes

1. ¿En qué variable se eperimenta una mayor variación de w en valor absoluto?
2. Los valores de $\frac{\partial w}{\partial a}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$, $\frac{\partial w}{\partial c}$ en el punto P son respectivamente -1.06, 1.6, 0.14 y $w(P) = 0.36$. Aproxime los factores de condicionamiento de w respecto a a, s, c.
3. ¿Son coherentes sus resultados obtenidos en la pregunta 2 con lo observado en la pregunta 1?

Problema 3

Considere la función $f(x) = \int_1^x \ln^2(t)dt$; $1 \leq x \leq 2.2$. Utilizando la función $\ln(t)$ se logra la tabla mostrada abajo.

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
$f(x_i)$	0	0.00232	0.01638	0.04943	0.10586	0.18832	0.29845

- Utilizando interpolación de Lagrange obtenga la polinomial cuadrática que interpole la tabla. Aproxime $f(x)$ para $x = 1.3$; $x = 1.7$; $x = 2.1$. Sugerencia: $p(x)$ cuadrático en $[x_{2k}, x_{2k+2}]$, $k = 0, 1, 2$.
- Establezca una cota para el error de interpolación de $f(x)$ en el intervalo $[1.4, 1.8]$.

Problema 4

Se ha diseñado un trazado de un tobogán de esquí de la forma $y = \sin(x)+2$, donde $0 \leq x \leq 5$. Para poder hacer estudios de estabilidad, entre otros, se requiere conocer la función que define la masa que en este caso se supondrá dada por

$$f(u) = \int_1^u \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx \qquad 0 \leq u \leq 5$$

Suponga que usted interpola $f(u)$ mediante un polinomio $p(u)$ en los tres puntos de Chebyshev del intervalo $[0.5]$, esto es, en $(0.334936, 2.5, 4.66506)$. Suponga que la deriva de orden j de $f(u)$ están acotadas por $\sqrt{j}, j = 2, 3, 4$.

- Plantear una fórmula que permita obtener el error de interpolación de $f(u)$ mediante $p(u)$ en el intervalo $[0, 5]$.
- Obtenga una cota superior uniforme para error de interpolación de $f(u)$ mediante $p(u)$ en el intervalo $[0, 5]$. Sugerencia: Observe bien que se le pide el error en el intervlao $[0, 5]$, no le sirve obtener el error en $[0.335, 4.665]$.