Universidad Técnica
Federico Santa María
Departamento de Matemática

MAT 270 Análisis Numérico para ingeniería civil

Demostrativo en Clase 26 marzo 2019.

Profesor Jaime Figueroa Nieto

Cap.2
Interpolación en nodos de Chebyshev

Problema:

Interpolar $L(x)=\int_0^x \sqrt{1+4\,t^2}\,dt$, 0≤x≤1 en tres nodos de Chebyshev en [0,1] y estimar el error.

La función $L(x)$ define la longitud de arco de la parábola $y=x^2$, 0≤x≤1 o la masa de una varilla delgada de densidad δ=1 con esa forma.

Desarrollo:

1° Definimos la función $L(x)$

```
In[1]:= L[x_] := NIntegrate[Sqrt[1 + 4 t^2], {t, 0, x}]
L[0.5]
Out[2]= 0.573897
```

2° Nodos de Chebyshev en [-1,1]:

```
In[3]:= Table[ u[i] = Cos[(2 i - 1) Pi / 6], {i, 1, 3}]
```

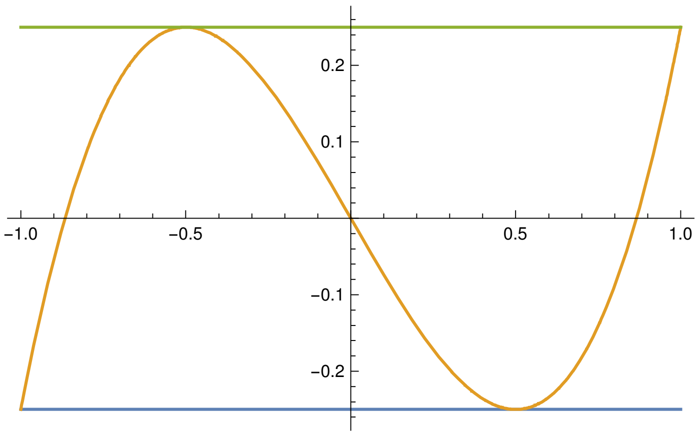
Out[3]= $\left\{\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

Productoria en n=3 nodos está acotada por $\frac{1}{2^{n-1}}$:

In[4]:=
```
w = (u - u[1]) (u - u[2]) (u - u[3])
Plot[{-1 / 4, w, 1 / 4}, {u, -1, 1}]
```

Out[4]= $u \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+u\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+u\right)$

Out[5]=



3° Cálculo del polinomio interpolante: primero se calculan los nodos con el cambio de variable $x = \frac{u+1}{2}$.

In[6]:=
```
Table[x[i] = (u[i] + 1) / 2, {i, 1, 3}] // N
datos = Table[{x[i], L[x[i]]}, {i, 1, 3}] // N
```

Out[6]= {0.933013, 0.5, 0.0669873}

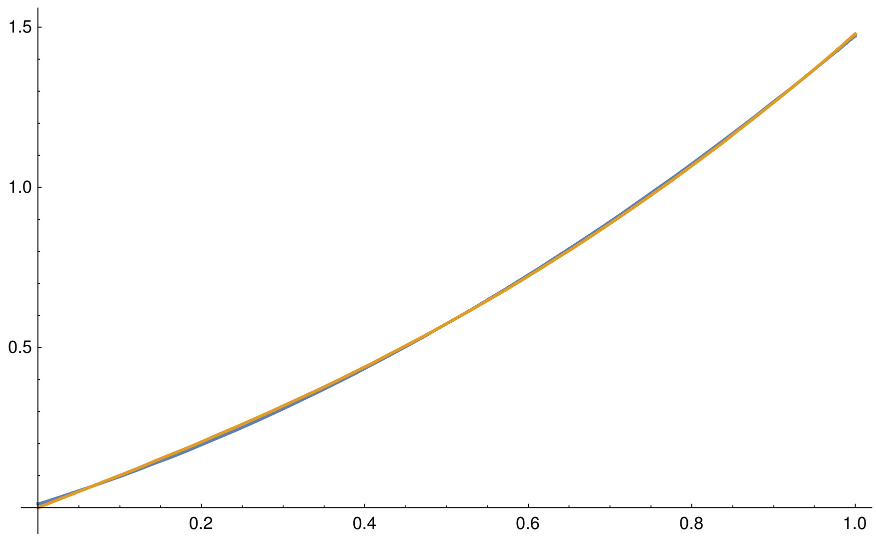
Out[7]= {{0.933013, 1.33315}, {0.5, 0.573897}, {0.0669873, 0.0671872}}

Polinomio de interpolación y la comparación con el original:

In[8]:=
```
p = InterpolatingPolynomial[datos, x];
p /. {x → 0.5}
Plot[{p, L[x]}, {x, 0, 1}]
```

Out[9]= 0.573897

Out[10]=



Se recuerda que en clase se calculó el error: 0.0208. Ello indica que es exacta hasta el primer decimal.

Cálculo de un polinomio de interpolación en otros nodos, por ejemplo, $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$
Los respectivos valores son:

In[11]:=
```
{L[0], L[0.5], L[1]}
```

Out[11]= {0., 0.573897, 1.47894}

Formemos la tabla a interpolar:

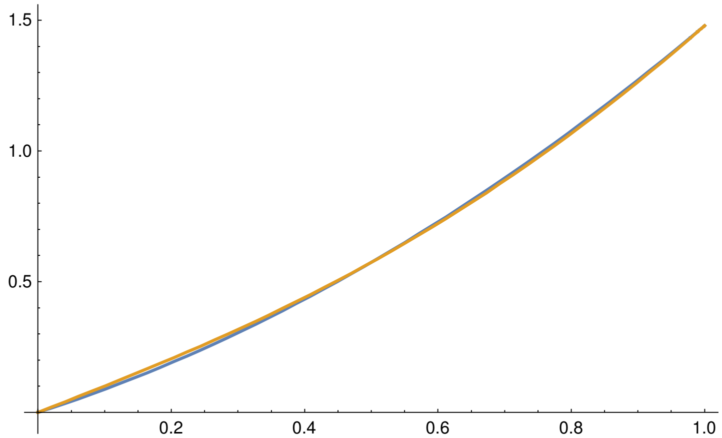
In[12]:=
```
datos2 = {{0, 0}, {0.5, L[0.5]}, {1, L[1]}}
```

Out[12]= {{0, 0}, {0.5, 0.573897}, {1, 1.47894}}

Cálculo del polinomio interpolación y su comparación con el original:

In[13]:=
```
q = InterpolatingPolynomial[datos2, x];
Plot[{q, L[x]}, {x, 0, 1}]
```

Out[14]=



El error es mayor en x=0.2:

In[15]:=
```
{L[0.2], p /. {x → 0.2}, q /. {x → 0.2}}
```

Out[15]=
```
{0.205212, 0.195965, 0.189821}
```

Ejercicio: Hacer lo mismo para una densidad $\delta = 1 + t^2$, esto es, $M(x) = \int_0^x \delta \sqrt{1 + 4t^2}\, dt$, $0 \le x \le 1$

Valparaíso, 26 marzo 2019
JFN