4 Geometría Analítica

Ejercicios resueltos

1. Dadas las rectas:

$$\begin{aligned} \ell_1 &: \; y = 2ax + 5 \\ \ell_2 &: \; 3x + y + 9 = 0 \end{aligned}$$

   Calcular el valor de **a** de modo que:
   i) $\ell_1 \perp \ell_2$ ii) $\ell_1 \| \ell_2$

   Respuesta: Sea m_1 y m_2 las pendientes de ℓ_1 y ℓ_2, respectivamente; luego $m_1 = 2a$, $m_2 = -3$
   $\ell_1 \perp \ell_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1 \Leftrightarrow -6a = -1 \Leftrightarrow a = 1/6$
   $\ell_1 \| \ell_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2 \Leftrightarrow 2a = -3 \Leftrightarrow a = -3/2$.

2. Si $A = (-2, 3)$ y $B = (3, -1)$ encuentre la ecuación de la recta simetral del trazo $\overline{AB}$.

   Respuesta: Método 1. Sea ℓ la simetral, luego $P \in \ell \Leftrightarrow d(A, P) = d(B, P)$.
   Si $P = (x, y)$ entonces: $\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2}$.
   Luego $4x - 6y + 13 = -6x + 2y + 10$, de donde $10x - 8y + 3 = 0$.

   Método 2. Sea C el punto medio de $\overline{AB}$, luego $C = \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$, $m_{AB} = -\dfrac{4}{5}$, entonces $m_\ell = 5/4$. Luego $\ell : y = \dfrac{5}{4}x + n$, pero $C \in \ell$ de donde: $1 = \dfrac{5}{8} + n \Rightarrow n = 3/8$.

$$\ell : y = \frac{5}{4}x + \frac{3}{8}$$

3. Sean $A = (-4, 3)$, $B = (5, 1)$, $C = (2, 6)$ los vértices de un triángulo. Calcular la ecuación de la recta que contiene a la transversal de gravedad t_A.

   Respuesta: t_A es el segmento que pasa por A y el punto medio D del trazo $\overline{BC}$.

$$D = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right) \qquad \ell_{AD} : y - 3 = m(x + 4)$$

   Como $D \in \ell_{AD}$ entonces: $\frac{7}{2} - 3 = m\left(\frac{7}{2} + 4\right)$ de donde $m = 1/15$, luego $\ell_{AD} : y - 3 = \frac{1}{15}(x + 4)$.

4. Encontrar la ecuación de la recta ℓ que contiene el punto de intersección de las rectas $\ell_1 : 3x + y - 9 = 0$; $\ell_2 : 4x - 3y + 1 = 0$ y que se encuentra a 2 unidades del origen.

   Respuesta: Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x + y - 9 & = & 0 \\ 4x - 3y + 1 & = & 0 \end{array}\right\} \quad \text{se obtiene} \quad \ell_1 \cap \ell_2 = \{(2,3)\}$$

   Como $(0,0) \notin \ell$ entonces $\ell : ax + by + c = 0$ con $c \neq 0$, es decir, ℓ es de la forma: $Ax + By + 1 = 0$, $(2,3) \in \ell \Rightarrow 2A + 3B + 1 = 0$
   $d((0,0),\ell) = \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 2$ de donde $A^2 + B^2 = 1/4$.
   Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2A + 3B + 1 & = & 0 \\ A^2 + B^2 & = & 1/4 \end{array}\right\}$$

   Se obtiene $B = 0$, $A = -1/2$ ó $B = -6/13$, $A = 5/26$.
   Por lo tanto $\ell : -\dfrac{1}{2}x + 1 = 0$ ó $\ell : \dfrac{5}{26}x - \dfrac{6}{13}y + 1 = 0$
   Nota: dibuje las rectas y verifique geométricamente el porqué aparecen dos rectas solución.

5. Dada la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0$.

   a) ¿ intercepta la circunferencia a la recta $\ell : x + y - 4 = 0$?

   b) ¿ cuál es la distancia del centro de la circunferencia a ℓ?

   Respuesta: Método 1. La ecuación de la circunferencia se puede escribir en la forma: $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 1$. Luego el centro $C = (2,-4)$
   $d(C,\ell) = \dfrac{6}{\sqrt{2}} > 1 =$ radio de la circunferencia, en consecuencia la recta ℓ no intercepta a la circunferencia.
   Método 2. Consiste en resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y - 4 & = & 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 & = & 0 \end{array}\right\} \quad \text{el cual no admite solución.}$$

   Observar que el argumento geométrico es más directo y simple que el algebraico.

6. Encuentre la ecuación del L. G. de todos los puntos $P = (x, y)$ tales que: $d(P, T_1)/d(P, T_2) = \sqrt{2}$, donde $\overline{PT_1}$ y $\overline{PT_2}$ son las tangentes trazadas desde P a las circunferencias: $(x + 3)^2 + y^2 = 9$; $(x - 3)^2 + y^2 = 9$, respectivamente. Identificar el L. G.

   Respuesta: Como $\overline{PT_1}$ y $\overline{PT_2}$ son tangentes entonces por el Teorema de Pitágoras se sabe que:

   $$d^2(P, C_1) = d^2(P, T_1) + 9 \quad \text{y} \quad d^2(P, C_2) = 9 + d^2(P, T_2)$$

   donde $C_1 = (-3, 0)$, $C_2 = (3, 0)$ son los centros de estas circunferencias. Luego se tiene que

   $$\begin{aligned} \frac{d^2(P, C_1) - 9}{d^2(P, C_2) - 9} &= (\sqrt{2})^2, && \text{en consecuencia} \\ \frac{(x + 3)^2 + y^2 - 9}{(x - 3)^2 + y^2 - 9} &= 2. && \text{Simplificando se obtiene} \end{aligned}$$

   $x^2 - 18x + y^2 = 0$ o sea $(x - 9)^2 + y^2 = 9^2$

   Se trata de una circunferencia de centro en $(9, 0)$ y radio 9.

7. Encuentre la ecuación del L. G. de todos los puntos $P = (x, y)$ tales que: son puntos medios de todas las cuerdas de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ con un extremo en $A = (a, 0)$, $a > 0$.

   Identifique el L.G.

   Respuesta: Sea $B = (x_B, y_B)$ un extremo de la cuerda y $P = (x, y)$ un punto en el L.G.

   Como P es un punto medio de $\overline{BA}$ entonces $x = \frac{1}{2}(a + x_B)$, $y = \frac{1}{2}y_B$.

   Entonces $x_B = 2x - a$, $y_B = 2y$.

   Como B está en la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, entonces: $(2x - a)^2 + 4y^2 = a^2$.

   Desarrollando se llega a: $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$. Luego se trata de la circunferencia de centro en $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ y radio $\frac{a}{2}$.

8. El siguiente ejercicio pretende mostrar la justificación de la forma del gráfico de una elipse utilizando sólo recursos algebraicos.

Solución: Consideremos la elipse E de ecuación: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

a) **Estudio de simetrías:** Si $(x, y) \in E$ entonces claramente $(-x, y), (x, -y), (-x, -y) \in E$, en consecuencia el gráfico es simétrico con respecto del eje Y, del eje X y del origen, respectivamente.

b) **Valores admisibles de las variables.** Despejando "y" de la ecuación de E se obtiene $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, luego $a^2 - x^2 \geq 0$ y en consecuencia $-a \leq x \leq a$.

Al despejar "x" de la misma ecuación se obtiene en forma análoga $-b \leq y \leq b$.

En consecuencia el gráfico se encuentra dentro del rectángulo $[-a, a] \times [-b, b]$.

c) **Crecimiento - decrecimiento de la curva.** Por razones de simetría consideremos sólo el caso $0 < x < a$. Sean $u < v$ dos valores de x. Lo que se trata es de comparar los respectivos valores de las ordenadas correspondiente a u y v.

Sabemos que $y(x) = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Como $0 < u < v < a$ entonces $u^2 < v^2 \Rightarrow -u^2 > -v^2$, es decir, $a^2 - u^2 > a^2 - v^2$, de donde $y(u) > y(v)$.

En consecuencia la elipse **decrece** en $[0, a]$.

d) Ahora intentaremos probar que el gráfico de E en $[0, a]$ está por encima de la recta ℓ que une los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$ $\ell : y = -\dfrac{b}{a}x + b$. Bastará estimar el signo de

$$y_E - y_\ell = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} - \left(-\frac{b}{a}x + b\right) = b\left[\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} + \frac{x}{a}\right] - b$$

Probaremos que la expresión en corchete es mayor que 1, para $0 < x < a$

$\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} + \dfrac{x}{a} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2-x^2} + x > a \Leftrightarrow$
$\sqrt{a^2-x^2} > a - x > 0 \ \Leftrightarrow a^2 - x^2 > a^2 - 2ax + x^2$
$\Leftrightarrow \ x(x-a) < 0$ lo que es válido.

Todo lo anterior permite justificar la forma de la elipse y lo único que no es posible justificar con este estudio es la "continuidad" del gráfico.

9. Encontrar la ecuación de la circunferencia de centro $C = (1,6)$ y que es tangente a $\ell : x - y - 1 = 0$.

   Respuesta: Sea ℓ_1 la recta que pasa por C y por P punto de tangencia entre ℓ y la circunferencia $m_\ell = 1$, luego $m_{\ell_1} = -1$.

   $$\ell_1 : y - 6 = -1(x-1) \quad \text{o sea} \quad x + y - 7 = 0$$

   Luego P es la intersección de ℓ con ℓ_1:

   $$\left.\begin{array}{rcl} x - y & = & 1 \\ x + y & = & 7 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad P = (4,3)$$
   $$d(P,C) = \sqrt{18} = \text{ radio de la circunferencia}$$

   Luego la ecuación de la circunferencia es:

   $$(x-1)^2 + (y-6)^2 = 18$$