SISTEMAS LINEALES AUTÓNOMOS EN EL PLANO
ESTUDIO CUALITATIVO

E. SÁEZ

Un sistema de ecuaciones de la forma:

(1) $$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{dx}{dt} & = & ax+by \\ \frac{dy}{dt} & = & cx+dy \end{array}\right. \quad \text{, ó matricialmente ,} \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

es un **Sistema Lineal Autónomo** en el plano.

En estas notas supondremos que el sistema (1) es Real, esto significa que las variables x, y toman sólo valores reales y los coeficientes a, b, c, d tambien son números reales.

Definición Una curva parametrizada y diferenciable en el plano $\mathbb{R}^2$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x(t) \\ y & = & y(t) \end{array}\right. \quad \text{, donde el parámetro} \quad t \in \mathbb{R}$$

Es una **solución** , o bien una **trayectoria** , o bien una **órbita** del sistema (1) si y sólo si se satisfacen en $\mathbb{R}$, las dos identidades siguientes:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}(t) & \equiv & ax(t)+by(t) \\ \dot{y}(t) & \equiv & cx(t)+dy(t) \end{array}\right.$$

Observación : Nótese que $x(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0$ es una parametrización trivial del origen y claramente es órbita del sistema (1) llamada **Punto de Equilibrio**. El origen es un punto fijo y como solución del sistema corresponde a una curva reducida a un único punto.

Comentario: El sistema (1) sin el parámetro t, se puede escribir como una ecuación diferencial ordinaria $\frac{dx}{dy} = \frac{ax+by}{cx+dy}$, o bien en la forma diferencial,

$$(cx+dy)\mathrm{d}x - (ax+by)\mathrm{d}y = 0$$

Es inmediato que si una curva diferenciable $(x(t), y(t))$ con $t \in \mathbb{R}$ es solución del sistema (1), entonces se tiene la identidad

(2) $$(cx(t)+dy(t))\mathrm{d}x(t) - (ax(t)+by(t))\mathrm{d}y(t) \equiv 0$$

Departamento de Matemática, UTFSM
e–mail: eduardo.saez@usm.cl.

Esta identidad significa que las soluciones en el plano $\mathbb{R}^2$ del sistema (1) son curvas contenidas en las curvas solución de la forma diferencial (2) y reciprocamente pues el argumento es reversible. Es decir, las curvas soluciones del sistema y de la forma diferencial son las mismas. Sin embargo existe una diferencia entre dichas soluciones , en el caso del sistema las curvas tienen una **orientación** inducida por el recorrido en sentido positivo del parámetro real t (ver Fig. 1) y en el caso de la forma diferencial las curvas no presentan orientación.

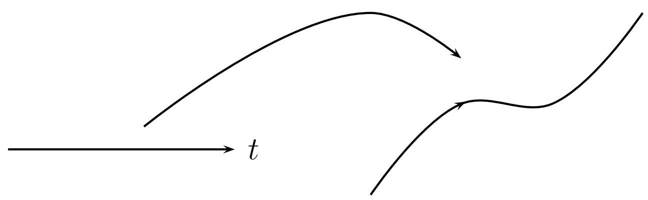


Fig. 1

La propiedad anterior se puede utilizar para conocer las soluciones del sistema (1) si se conocen la soluciones de la forma diferencial (2) pues sólo hay que descubrir cuáles son las orientaciones correspondientes. Veremos en estas notas que es muy simple descubrir las orientaciones de las soluciones del sistema.

Para estudiar las curvas que son soluciones de (1) es conveniente previamente elegir un sistema de coordenadas adecuadas que simplifiquen la descripción cualitativa de dichas órbitas. Con este objeto recordemos las matrices cuadradas de Jordan.

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matriz de coeficientes de la forma matricial en (1) , P una matriz cuadrada no-singular de 2×2. Consideremos el cambio de coordenadas:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{3}$$

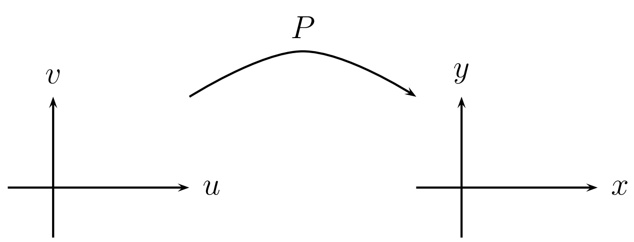


Fig. 2

Entonces

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} \Rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} \Rightarrow AP \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}$$

y en consecuencia

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = P^{-1}AP \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{4}$$

Recordemos que un escalar (real,o bien, complejo) es por definición un valor propio de la matriz A, si y sólo si, la ecuación matricial

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

tiene soluciones diferente de la solución nula. Las soluciones no nulas se llaman vectores propios de la matriz A. Se sabe además que los valores propios de la matriz A son las raices de la ecuación **Característica**

$$\boxed{\lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) \;\; = \;\; 0}$$

donde $tr(A)$ y $det(A)$ designan la traza y determinante de la matriz A, respectivamente.

Si se elije la matriz P tal que $P^{-1}AP = J$ es una matriz de Jordan, es decir, una matriz en términos de los valores propios de la matriz A. El sistema (1) es cualitativamente equivalente por cambio de coordenadas a uno y sólo uno de los cuatro casos siguientes:

Sean λ_1, λ_2 los valores propios de A, es decir , las raices de la ecuación **Característica**, entonces se tienen las siguientes matrices de Jordan ([1]):

$$\begin{array}{rll}
1) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} & , & \lambda_1 \neq \lambda_2 \;\; , \;\; \text{valores propios reales y distintos} \\
2.1) \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} & , & \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 \;\; , \;\; A = J \;\; , \; \text{un valor propio de multiplicidad dos} \\
2.2) \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} & , & \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 \;\; , \;\; A \neq J \;\; , \; \text{un valor propio de multiplicidad dos} \\
3) \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} & , & \lambda_1 = \alpha + i\beta, \; \lambda_2 = \alpha - i\beta \;\; , \;\; \beta > 0 \;\; , \;\; \text{valores propios no reales}
\end{array}$$

caso 1) Por (3; 4) el sistema (1) es equivalente en las coordenadas uv con el sistema:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \;\; , \;\; \text{o bien,} \; \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{u} & = & \lambda_1 u \\ \dot{v} & = & \lambda_2 v \end{array} \right. \;\; , \;\; \lambda_1 \neq \lambda_2. \tag{5}$$

Sin el parámetro t, se tiene la forma diferencial $\lambda_2 v du - \lambda_1 u dv \; = \; 0$

Si $\lambda_1 \neq 0$ la forma diferencial anterior se puede escribir

$$\alpha v du - u dv \;\; = \;\; 0 \;\; , \; \text{donde} \; , \; \alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in \mathbb{R} - \{1\} \tag{6}$$

En el plano uv, por verificación directa, las rectas $u = 0, \; v = 0$ son soluciones triviales de la F.D. y el punto $(0, 0)$ es la única singularidad.

¿ Otras soluciones ?. Si $u \neq 0$ y $v \neq 0$, entonces $uv \neq 0$ y la forma diferencial (6) es equivalente con

$$\alpha \frac{du}{u} - \frac{dv}{v} \; = \; 0$$

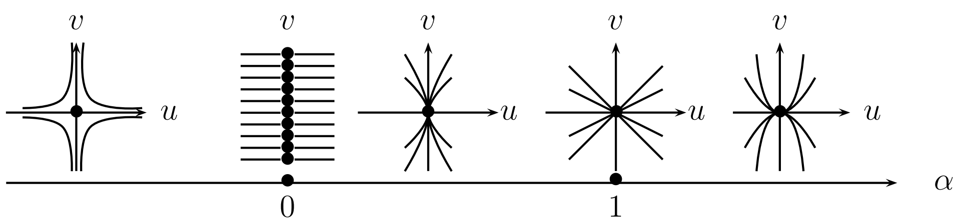
Integrando se tiene:

$$\alpha \ln|u| - \ln|v| \; = \; -\ln c \quad ,\text{con} \quad c > 0 \;\Rightarrow\; |v| \; = \; c|u|^{\alpha}$$

Pero esta última ecuación es equivalente

(7) $$\begin{cases} v = c|u|^{\alpha} & \text{si} \quad v > 0 \\ v = -c|u|^{\alpha} & \text{si} \quad v < 0 \end{cases} \quad , \; c > 0$$

Estas ecuaciones nos permite usar el siguiente resumen del ejemplo 2 en [5] en término del signo del parámetro α.



Dependiendo del signo de los valores propios se pueden distinguir los siguientes casos:

1.1) Supongamos que los valores propios son positivos, es decir, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. De (5) la segunda ecuación del sistema correspondiente es $\dot{v} \; = \; \lambda_2 v$. En el semiplano superior, $v > 0$. Tenemos además que $\lambda_2 > 0$, entonces $\dot{v} > 0$. Esto significa que $v = v(t)$ es una función creciente en términos del parámetro t y en consecuencia la orientación de las soluciones del sistema (5) es en el sentido de alejamiento del origen . Si se toma la primera ecuación del sistema (5) y se estudia la función $u = u(t)$ incluido el eje u , la conclución es la misma.

En el semiplano inferior, $v < 0$. Como $\lambda_2 > 0$ entonces $\dot{v} < 0$. Esto significa que $v = v(t)$ es una función decreciente en términos del parámetro t y en consecuencia la orientación de las soluciones del sistema (5) es también en el sentido de alejamiento del origen.

Como $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ se concluye que el comportamiento cualitativo de las soluciones del sistema (5) y sus orientaciones, es como se indica en el diagrama de la Fig. 7, llamados retratos de fases. El origen se llama **Nodo Repulsor de dos Tangentes**.

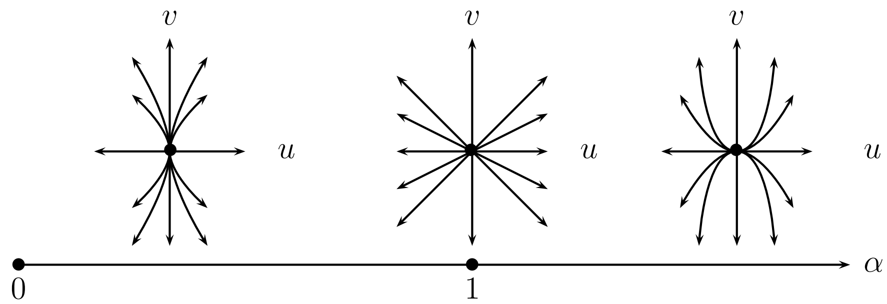


Fig. 7

1.2) Supongamos que los valores propios son negativos, es decir, $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Siguiendo los mismos pasos de 1.1) y teniendo presente ahora los signos negativos de λ_1, λ_2 se tiene que también $\alpha > 0,\ \alpha \neq 1$ y se concluye que el comportamiento cualitativo de las soluciones del sistema (5) y sus orientaciones, es como se indica en el diagrama de la Fig. 8, llamados retratos de fases. El origen se llama **Nodo Atractor de dos Tangentes** .

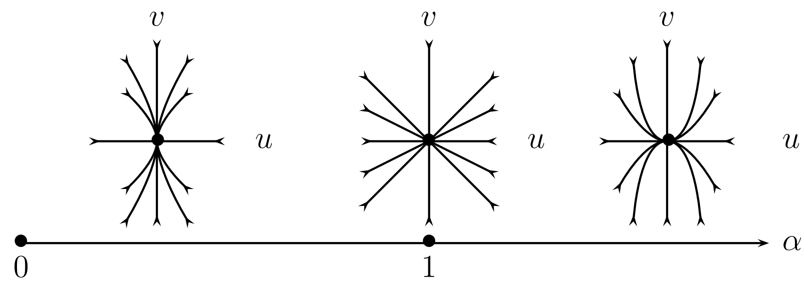


Fig. 8

1.3) Supongamos que los valores propios son de signos opuestos, es decir, $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$, o bien, $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 > 0$.
Si $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, entonces $\alpha < 0$. De (5) la segunda ecuación del sistema correspondiente es $\dot{v} = \lambda_2 v$. Como $\lambda_2 < 0$ en el semieje v con $v > 0$ se tiene $\dot{v} < 0$, es decir $v = v(t)$ es una función decreciente en términos del parámetro t. En el semieje v con $v < 0$ se tiene $\dot{v} > 0$, es decir $v = v(t)$ es una función creciente en términos del parámetro t . Estos comportamientos significan que el eje v tiene una orientación en el sentido de tendencia hacia el origen ver Fig. 9. Análogamente si se considera la primera ecuación del sistema $\dot{u} = \lambda_1 u$. Como $\lambda_1 > 0$ en el semieje u con $u > 0$ se tiene $\dot{u} > 0$, es decir $u = u(t)$ es una función creciente en términos del parámetro t. En el semieje u con $u < 0$ se tiene $\dot{u} < 0$, es decir $u = u(t)$ es una función decreciente en términos del parámetro t . Estos comportamientos significan que el eje u tiene una orientación en el sentido de alejamiento del origen ver Fig. 9.

Como $\alpha < 0$, las ecuaciones en (7) se pueden escribir

$$\left\{ \begin{array}{lll} v|u|^{-\alpha} = c & \text{si} & v > 0 \\ v|u|^{-\alpha} = -c & \text{si} & v < 0 \end{array} \right. \quad , \ c > 0$$

Estas ecuaciones significan que cualitativamente las soluciones del sistema (5) fuera de los ejes coordenados son como arcos de hipérbolas donde por el análisis anterior la orientación de las abscisas y ordenadas de un punto de una solución $(u(t), v(t))$ es:

$$\left\{ \begin{array}{llll} \dot{u} > 0 & \dot{v} < 0 & \text{si} & u > 0, v > 0 \\ \dot{u} < 0 & \dot{v} < 0 & \text{si} & u < 0, v > 0 \\ \dot{u} < 0 & \dot{v} > 0 & \text{si} & u < 0, v < 0 \\ \dot{u} > 0 & \dot{v} > 0 & \text{si} & u > 0, v < 0 \end{array} \right. \text{, es decir,}$$

$$u(t) \ : \left\{ \begin{array}{l} \text{creciente} \\ \text{decreciente} \\ \text{decreciente} \\ \text{creciente} \end{array} \right. \quad v(t) \ : \left\{ \begin{array}{l} \text{decreciente} \\ \text{decreciente} \\ \text{creciente} \\ \text{creciente} \end{array} \right. \quad \text{si} \ : \left\{ \begin{array}{l} u > 0, v > 0 \\ u < 0, v > 0 \\ u < 0, v < 0 \\ u > 0, v < 0 \end{array} \right.$$

Estos comportamientos de las abscisas y ordenadas de las soluciones del sistema (5) demuestran que dichas soluciones son como en la Fig. 9 . La Fig. 9 es llamada Retrato de Fases del sistema (5) y el punto de equilibrio se llama **Silla Hiperbólica**.

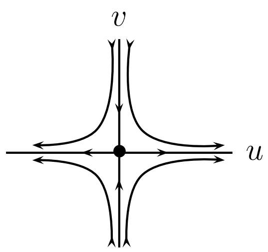


Fig. 9

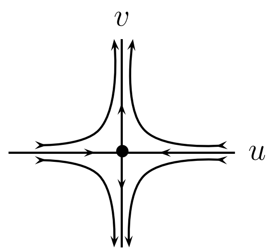


Fig. 10

Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, entonces $\alpha < 0$. Análogamente a los análisis anteriores se tiene que el Retrato de Fases del sistema (5) es como en la Fig. 10 . El punto de equilibrio también se llama **Silla Hiperbólica**.

Comentario: De (5) integrando las ecuaciones, es inmediato que las ecuaciones paramétricas de las órbitas del sistema (5) están dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{lll} u(t) & = & c_1 e^{\lambda_1 t} \\ v(t) & = & c_2 e^{\lambda_2 t} \end{array} \right. \quad , \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Si mediante operatoria algebraica se elimina el parámetro t se obtiene en el plano uv las ecuaciones de las curvas que son soluciones de la forma diferencial en (5)

Para el instante $t = 0$, del sistema paramétrico anterior se tiene $u(0) = c_1, v(o) = c_2$. Entonces el sistema se puede reescribir

(8) $$\left\{ \begin{array}{lcl} u(t) & = & u(0)e^{\lambda_1 t} \\ v(t) & = & v(0)e^{\lambda_2 t} \end{array} \right. , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Por el Teorema de existencia y unicidad para sistemas de ecuaciones diferenciales [4] , para cada punto $(u(0), v(0))$ en el plano uv, las ecuaciones en (8) son la ecuaciones paramétricas de la única solución del sistema que en el instante inicial pasa por el punto $(u(0), v(0))$. Como el punto $(u(0), v(0))$ es fijo pero es cualquier punto del plano uv , entonces en (8) se tiene todas las soluciones del sistema (5). Por esta propiedad (8) se llama solución general de (5).

caso 2.1) Por (3; 4) el sistema (1) es equivalente en las coordenadas uv con el sistema:

(9) $$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \; ; \; \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{u} & = & \lambda_0 u \\ \dot{v} & = & \lambda_0 v \end{array} \right. , \quad \lambda_0 \in \mathbb{R}$$

o bien, sin el parámetro t, si $\lambda_0 \neq 0$ (el caso $\lambda_0 = 0$ es degenerado) se tiene la forma diferencial $vdu - udv = 0$. En el plano uv, por verificación directa, las rectas $u = 0$, $v = 0$ son soluciones triviales de la F.D. y el punto $(0, 0)$ es la única singularidad.

¿ Otras soluciones ?. Si $u \neq 0$ y $v \neq 0$, entonces $uv \neq 0$ y la F.D. es equivalente con

$$\frac{du}{u} = \frac{dv}{v}$$

Integrando se tiene $u = cv$ con $c \in \mathbb{R}$, es decir, las soluciones de la F.D. son semirectas que se extienden en forma continua al origen. Si $\lambda_0 > 0$ cualitativamente el retrato de fases de (9) es como en la Fig. 7 para $\alpha = 1$. El punto de equilibrio se llama **Nodo Estelar Repulsor**. Análogamente para $\lambda_0 < 0$ se tiene cualitativamente que el retrato de fases de (9) es como en la Fig. 8 para $\alpha = 1$. El punto de equilibrio se llama **Nodo Estelar Atractor**.

Comentario: Nótese que de (9) es inmediato que las ecuaciones paramétricas de las soluciones del sistema (9) son:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u(t) & = & c_1 e^{\lambda_0 t} \\ v(t) & = & c_2 e^{\lambda_0 t} \end{array} \right. , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Si se dividen las ecuaciones desaparece el parámetro t y se obtiene en el plano uv las ecuaciones de las rectas que son soluciones de la forma diferencial correspondiente.

Para el instante $t = 0$, del sistema paramétrico anterior se tiene $u(0) = c_1, v(o) = c_2$. Entonces el sistema se puede reescribir

(10) $$\left\{ \begin{array}{lcl} u(t) & = & u(0)e^{\lambda_0 t} \\ v(t) & = & v(0)e^{\lambda_0 t} \end{array} \right. , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Por el Teorema de existencia y unicidad para sistemas de ecuaciones diferenciales [4], para cada punto $(u(0), v(0))$ en el plano uv, las ecuaciones en (10) son las ecuaciones paramétricas de la única solución del sistema que en el instante inicial pasa por el punto $(u(0), v(0))$. Como el punto $(u(0), v(0))$ es fijo pero es cualquier punto del plano uv , entonces en (10) se tiene todas las soluciones del sistema (9). Por esta propiedad (10) se llama solución general de (9).

caso 2.2) Por (3; 4) el sistema (1) es equivalente en las coordenadas uv con el sistema:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \; ; \; \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{u} & = & \lambda_0 u + v \\ \dot{v} & = & \lambda_0 v \end{array} \right. \; , \; \lambda_0 \in \mathbb{R} \tag{11}$$

o bien, sin el parámetro t, si $\lambda_0 \neq 0$ (el caso $\lambda_0 = 0$ es degenerado) se tiene la forma diferencial $\lambda_0 v du - (\lambda_0 u + v)dv \; = \; 0$, es decir,

$$vd(\lambda_0 u) - (\lambda_0 u + v)dv \; = \; 0 \tag{12}$$

Si $\lambda_0 > 0$ y reemplazamos $\lambda_0 u \to u$ en (12) tenemos por simple reescalamiento del eje u que la F.D. es equivalente a la expresión más sencilla.

$$vdu - (u + v)dv \; = \; 0$$

De [5] pág.9 , cualitativamente la singularidad de esta F.D. en el origen es un **Nodo de una tangente** como indica la Fig. 11.

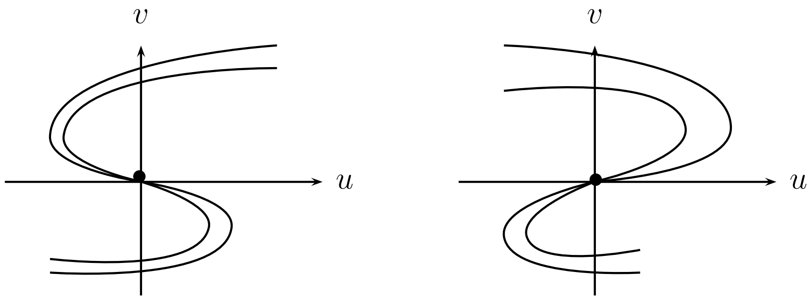


Fig. 11 Fig. 12

Para la F.D. anterior, el sistema matricial correspondiente es el sistema (11) con $\lambda_0 = 1$ de donde la segunda ecuación diferencial es $\dot{v} \; = \; v$. En el semiplano superior de la Fig. 11, tenemos $v > 0$ y en consecuencia $\dot{v} > 0$, esto significa que $v = v(t)$ es una función creciente en términos del parámetro t y en consecuencia la orientación de las soluciones del sistema (11) es en el sentido de alejamiento del origen. Análogamente, en el semiplano inferior $v = v(t)$ es una función decreciente en términos del parámetro t y en consecuencia la orientación de las soluciones del sistema (11) es en el sentido de alejamiento del origen. Si $v = 0$ de la primera ecuación del sistema (11) se tiene $\dot{u} > 0$ y en consecuencia el eje u es una solución con orientación de alejamineto del origen.

En resumen, el origen es un punto de equilibrio **Repulsor** como indica la Fig. 13 y es llamado **Nodo Repulsor de una Tangente**. Nótese que cualitativamente el origen del sistema (9) con $\lambda_0 > 0$, es como el retrato de fases en la Fig. 13

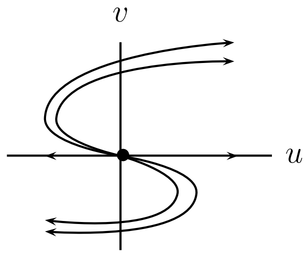


Fig. 13

Si $\lambda_0 < 0$ y reemplazamos $\lambda_0 u \to -u$ en (12) se tiene la F.D.

$$vdu + (-u + v)dv \;=\; 0$$

Cualitativamente las soluciones son como en la Fig. 12. El sistema matricial correspondiente es el sistema (11) con $\lambda_0 = -1$, de donde la segunda ecuación diferencial es $\dot{v} \;=\; -v$. En el semiplano superior de la Fig. 12, tenemos $v > 0$ y en consecuencia $\dot{v} < 0$, esto significa que $v = v(t)$ es una función decreciente en términos del parámetro t y en consecuencia la orientación de las soluciones del sistema (11) es en el sentido de tendencia hacia el origen. Análogamente, en el semiplano inferior $v \;=\; v(t)$ es una función creciente en términos del parámetro t y en consecuencia la orientación de las soluciones del sistema (11) es en el sentido de tendencia hacia el origen. Si $v = 0$ de la primera ecuación del sistema (11) se tiene $\dot{u} < 0$ y en consecuencia el eje u es una solución con orientación de tendencia hacia el origen.

En resumen, el origen es un punto de equilibrio **Atractor** como indica la Fig. 14 y es llamado **Nodo Atractor de una Tangente**. Nótese que cualitativamente el origen del sistema (9) con $\lambda_0 < 0$, es como el retrato de fases en la Fig. 14

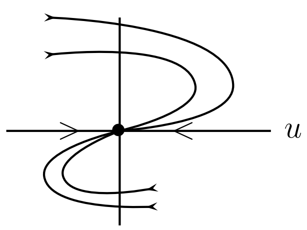


Fig. 14

Comentario 1. Nótese que de la segunda ecuación en (11) se tiene $v(t) = c_2 e^{\lambda_0 t}$. Reemplazando $v(t)$ en la primera ecuación en (11) e integrando se tiene $u(t) = (c_2 t + c_1)e^{\lambda_0 t}$. Luego las ecuaciones paramétricas de las soluciones del sistema (11) son:

$$\begin{cases} u(t) &= (c_2 t + c_1)e^{\lambda_0 t} \\ v(t) &= c_2 e^{\lambda_0 t} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Para el instante $t = 0$, del sistema paramétrico anterior se tiene $u(0) = c_1, v(o) = c_2$. Entonces el sistema se puede reescribir

$$\begin{cases} u(t) &= (v(0)t + u(0))e^{\lambda_0 t} \\ v(t) &= v(0)e^{\lambda_0 t} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{13}$$

Por el Teorema de existencia y unicidad para sistemas de ecuaciones diferenciales [4], para cada punto $(u(0), v(0))$ en el plano uv, las ecuaciones en (16) son las ecuaciones paramétricas de la única solución del sistema que en el instante inicial pasa por el punto $(u(0), v(0))$. Como el punto $(u(0), v(0))$ es fijo pero es cualquier punto del plano uv , entonces en (16) se tiene todas las soluciones del sistema (11). Por esta propiedad (16) se llama solución general de (11).

Comentario 2. Nótese que tanto los Nodos como las Sillas en los casos 1 y caso 2, tienen los semi ejes coordenados como soluciones de los respectivos sistemas. Si el sistema está escrito en la forma general (1), por el cambio de coordenadas (3) los respectivos sistemas son equivalentes. Las imágenes de los semi ejes $u = 0, v \neq 0$ y $v = 0, u \neq 0$ son semi rectas en el plano xy que son soluciones de (1).

Definición: Las rectas en el plano xy que contienen soluciones del sistema (1) se llaman rectas invariantes del sistema.

Ejemplo: Los ejes coordenados de los sistemas de Jordan que tienen en el origen una silla , o bien, un nodo con al menos dos tangentes son ejemplos de rectas invariantes del sistema.

Para calcular las ecuaciones de las rectas invariantes del sistema (1) se puede usar la transformación (3), pero (3) requiere para su aplicación la matriz P en forma explícita (se puede conseguir con argumentos del Algebra Lineal).

Otra alternativa para calcular las pendientes de dichas rectas con argumentos de ecuaciones diferenciales es usar la siguiente idea . Sea $y = mx$ con $m \in \mathbb{R}$ la ecuación de una recta invariante (el caso de la recta $x = 0$, eje y , se estudia directamente del sistema). En cada punto de dicha recta, diferente del origen, la derivada de la recta en el punto es la pendiente m, es decir, se tiene el sistema:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{cx+dy}{ax+by} = m \\ y = mx \end{array} \right. \quad , x \neq 0 \quad , \ ax + by \neq 0$$

Reemplazando la ecuación de la recta en la primera ecuación y reordenado se obtiene: $[bm^2 + (a - d)m - c]x = 0$, $x \neq 0$. Luego las pendientes de las rectas invariantes de (1) son las raices de la ecuación de segundo grado

$$\boxed{bm^2 + (a - d)m - c = 0} \tag{14}$$

Observación : Es fácil comprobar que los discriminantes de la ecuación anterior y de la ecuación **Característica** coinciden. Se propone al lector dar una interpretación sobre el porqué de esta coicidencia.

Comentario 3. Sea m_1 una raiz de la ecuación de las pendientes de las rectas invariantes, entonces $y = m_1 x$ es una recta invariante. En particular $(\mathbf{1}, \mathbf{m_1})$ son las coordenadas de un punto de la recta y la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m_1 \end{pmatrix}$$

admite solución en λ. Solución correspondiente al **valor propio** del vector propio $\begin{pmatrix} 1 \\ m_1 \end{pmatrix}$ de la matriz A.

Supongamos que λ_1 es la solución de la ecuación matricial . Entonces

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ m_1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t}$$

es la ecuación paramétrica de la semirecta solución de (1) que en el instante inicial $t = 0$ pasa por el punto $(1, m_1)$. En efecto, reemplazando directamente en (1) se tiene la identidad

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \equiv \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ m_1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \equiv A \begin{pmatrix} 1 \\ m_1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \equiv A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Principio de Superposición de Soluciones

En general, si suponemos que

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

son dos soluciones arbitrarias del sistema lineal

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{15}$$

Entonces, cualquier combinación lineal también es solución.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \quad , \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

En efecto, reemplazando directamente en el sistema (15) se tiene

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} \dot{x_1}(t) \\ \dot{y_1}(t) \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \dot{x_2}(t) \\ \dot{y_2}(t) \end{pmatrix} = k_1 A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} + k_2 A \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

$$= A \left[k_1 \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \right] = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Sea S el conjunto de **TODAS** las soluciones $(x(t), y(t))$ del sistema lineal (15) que satisfacen la condición inicial:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(0) & = & x_0 \\ y(0) & = & y_0 \end{array} \right. \quad , \; (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \tag{16}$$

Por el Principio de Superposición de Soluciones, S es un Espacio Vectorial. ¿ Cuál es la dimensión de S ?.

Respuesta: por el Teorema de Existencia y Unicidad para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, en el caso particular del instante $t = 0$ (tiempo arbitrario pero fijo) y $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ **existe única** solución del sistema (15) en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ tal que en el instante $t = 0$ pasa por el punto (x_0, y_0). Este argumento permite definir la aplicación

$$f : S \to \mathbb{R}^2 \;\text{ tal que }\; \varphi \mapsto f(\varphi) = (x_0, y_0)$$

donde φ es la única solución de (15) que en el instante $t = 0$ pasa por el punto (x_0, y_0) , ver Fig. 15.

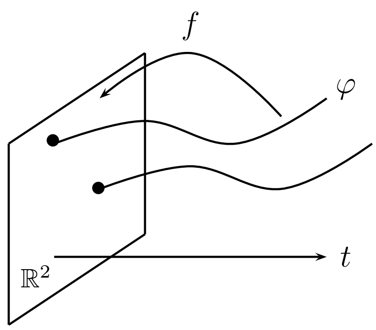


Fig. 15

Bajo el punto de vista del Algebra Lineal la aplicación f es un isomorfismo de Espacios Vectoriales pues es inyectiva por el Teorema de Unicidad , es epiyectiva por el Teorema de Existencia y claramente tiene la propiedad de linealidad $f(a\varphi_1 + b\varphi_2) = af(\varphi_1) + bf(\varphi_2)$.

Se sabe que dos Espacios Vectoriales isomorfos tienen la misma dimensión, entonces

$$dim(S) = dim(\mathbb{R}^2) = 2$$

Por la fórmula anterior dos soluciones linealmente independientes de (15) forman una base del Espacio de Soluciones. En particular si los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^2$, entonces las respectivas soluciones φ_1, φ_2 de (15) que en el instante $t = 0$ pasan por dichos puntos son base de S. En consecuencia

$$\varphi(t) = k_1\varphi_1(t) + k_2\varphi_2(t) \quad , \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

es una **solución general del sistema.**

Observación: En el plano de fases, cada punto representa una solucioón de (15) que satiface la respectiva condición inicial (16).

Aplicación: ¿ Ecuaciones paramétricas de la solución general del sistema (1) ?.

Respuesta parcial: Supongamos que el sistema (1) tiene dos rectas invariantes diferentes, de ecuaciones $y = m_1 x,\ y = m_2 x$ donde las pendientes se obtienen de la **ecuación (14)** (por ejemplo, en los casos de nodos de dos tangentes, sillas hiperbólicas). Sean $\lambda_1,\ \lambda_2$ las respectivas soluciones obtenidas como se detalla en el **comentario 3**, entonces;

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ m_1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ m_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t} \quad , \text{con} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

es solución general de (1).

caso 3) Por (3; 4) el sistema (1) es equivalente en las coordenadas uv con el sistema:

(17) $$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad , \text{ o bien,} \quad \begin{cases} \dot{u} &= \alpha u - \beta v \\ \dot{v} &= \beta u + \alpha v \end{cases}$$

donde, $\lambda_1 = \alpha + i\beta,\ \lambda_2 = \alpha - i\beta,\ \beta > 0$. Sin el parámetro t, se tiene la forma diferencial real

$$(\beta u + \alpha v)du - (\alpha u - \beta v)dv = 0$$

Es claro que en el plano uv el punto $(0,0)$, es decir el origen del sistema de coordenadas es la única singularidad de la forma diferencial.

¿ Otras soluciones ? Usando el cambio de coordenadas al sistema polar como en [5] se tiene que la F.D. se reduce a la ecuación diferencial de variables separables:

(18) $$\beta dr - \alpha r d\theta = 0 \quad , \quad \text{o bien ,}$$

$$\frac{dr}{r} - \frac{\alpha}{\beta} d\theta = 0 \quad , \quad \text{integrando ,} \quad \ln r - \frac{\alpha}{\beta}\theta = \ln c \quad , \quad c > 0$$

Las soluciones diferentes de la singularidad en el origen son:

$$r = ce^{\gamma\theta} \quad , \quad c > 0 \quad , \quad \gamma = \frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{R}.$$

Como el parámetro $\gamma \in \mathbb{R}$ se presentan agregando la singularidad en el origen, cualitativamente los casos que muestra el diagrama siguiente en términos del parámetro γ. Fig. 16 , ver [5].

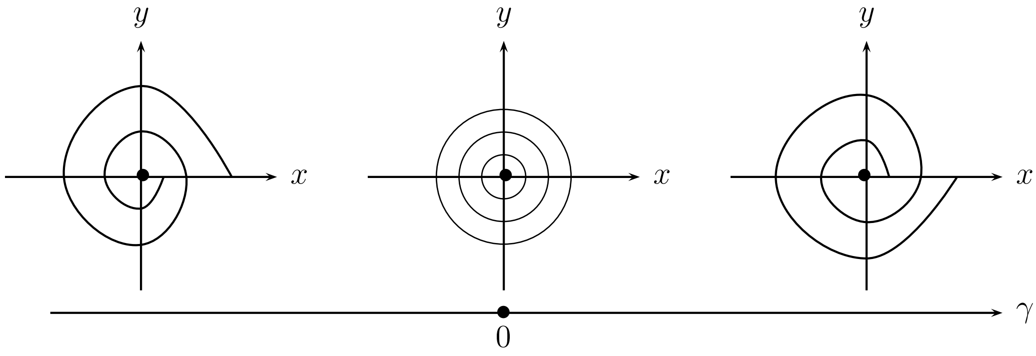


Fig. 16

De (18) se tiene que el sistema de ecuaciones en coordenadas polares equivalente al sistema (17) es

$$(19)\qquad \begin{cases} \dot{r} &= \gamma r \\ \dot{\theta} &= 1\ , \quad \gamma \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Si $\gamma > 0$, es decir, $\alpha > 0$ pues $\beta > 0$. De la primera ecuación del sistema (19) se tiene que $\dot{r} > 0$ y en consecuencia $r = r(t)$ es una función creciente en términos del parámetro t. Luego las soluciones son espirales con una orientación inducida por el parámetro t de alejamiento del punto de equilibrio como se muestra en el retrato de fases en la Fig. 17. para $\gamma > 0$. El punto de equilibrio se llama **Foco Repulsor**, o bien, **Fuente**.

Si $\gamma < 0$, es decir, $\alpha < 0$ pues $\beta > 0$. De la primera ecuación del sistema (19) se tiene que $\dot{r} < 0$ y en consecuencia $r = r(t)$ es una función decreciente en términos del parámetro t. Luego las soluciones son espirales con una orientación inducida por el parámetro t de tendencia hacia el punto de equilibrio como se muestra en el retrato de fases en la Fig. 17. para $\gamma < 0$. El punto de equilibrio se llama **Foco Atractor**, o bien, **Pozo**.

Si $\gamma = 0$, es decir, $\alpha = 0$ pues $\beta > 0$. De la primera ecuación del sistema (19) se tiene que $\dot{r} = 0$ y en consecuencia $r = r(t)$ es una función constante en términos del parámetro t. Luego las soluciones son circunferencias con una orientación positiva inducida por el parámetro t pues de la segunda ecuación del sistema (19), $\theta = \theta(t) > 0$ .Ver Fig. 17, para $\gamma = 0$. El punto de equilibrio se llama **Centro**.

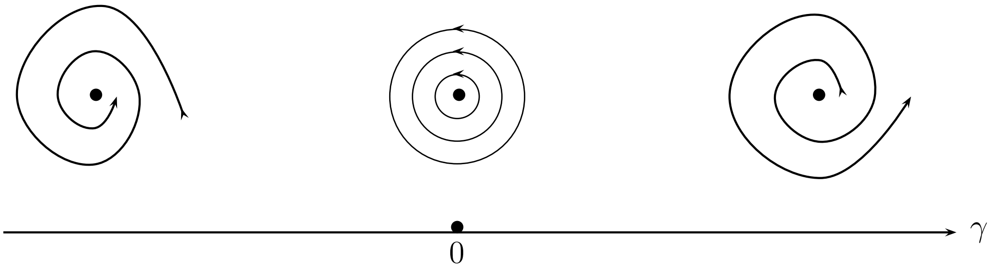


Fig. 17

¿ Ecuaciones paramétricas de las soluciones ?

Considerando en el plano complejo la variable compleja $z = u + iv \in \mathbb{C}$, se tiene $\dot{z} = \dot{u} + i\dot{v}$. Pero por (17)

$$\dot{z} = (\alpha u - \beta v) + i(\beta u + \alpha v) = (\alpha + i\beta)u + iv(\alpha + i\beta) = (\alpha + i\beta)(u + iv)$$

El sistema (17) es equivalente en el plano complejo a la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\dot{z} = (\alpha + i\beta)z$$

Es inmediato que la solución general de la ecuación anterior es de la forma

$$z(t) = z_0 e^{(\alpha+i\beta)t} \quad , \text{ donde } \; z_0 = u_0 + iv_0 \in \mathbb{C} \;\; , \text{ número complejo arbitrario.}$$

Por la identidad de Euler, $e^{i\theta} \equiv \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, la solución anterior se puede escribir $z(t) = (u_0 + iv_0)e^{\alpha t}[\cos\beta t + i \operatorname{sen}\beta t] = e^{\alpha t}[u_0 \cos\beta t - v_0 \operatorname{sen}\beta t + i(v_0 \cos\beta t + u_0 \operatorname{sen}\beta t)]$
Luego las ecuaciones paramétricas de las solución de (17) en el plano uv están dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u(t) & = & e^{\alpha t}(u_0 \cos\beta t - v_0 \operatorname{sen}\beta t) \\ v(t) & = & e^{\alpha t}(v_0 \cos\beta t + u_0 \operatorname{sen}\beta t) \end{array} \right. \tag{20}$$

Nótese que para cada $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$, (20) son las ecuaciones paramétricas de la solución que en el instante $t = 0$ pasan por el punto (u_0, v_0). Como (u_0, v_0) es un punto arbitrario en el plano $\mathbb{R}^2$, (20) es la solución general de (17).

¿ Ecuaciones paramétricas del caso general complejo ?

Supongamos un sistema real pero con valores propios no reales (complejo)
(21)

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \text{ y los valores propios } , \; \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & \alpha + i\beta \\ \lambda_2 & = & \alpha - i\beta \end{array} \right. , \beta > 0$$

El sistema matricial en los números complejos $\mathbb{C}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = (\alpha + i\beta) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad , \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C} \tag{22}$$

tiene solución no nula, pues $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ es un valor propio.

Sea $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ con $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, una solución no nula, es decir por (22), un vector propio (no necesariamente real) correspondiente al valor propio λ_1. Entonces la solución compleja que en el instante inicial $t = 0$ pasa por el punto (z_1, z_2) está dada por:

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} e^{(\alpha+i\beta)t} \quad , \text{donde } \left\{ \begin{array}{rcl} z_1(0) & = & z_1 \\ z_2(0) & = & z_2 \end{array} \right. \tag{23}$$

En efecto por verificación directa se comprueba :

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{pmatrix} = (\alpha + i\beta)e^{(\alpha+i\beta)t} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = e^{(\alpha+i\beta)t}(\alpha + i\beta) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$= e^{(\alpha+i\beta)t}A\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = Ae^{(\alpha+i\beta)t}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

¿ Ecuaciones paramétricas de la solución general real ?

Sean

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + ix_2 \\ z_2 = y_1 + iy_2 \end{cases}, \text{ las partes reales e imaginarias de las componentes}$$

del vector propio de λ_1. Separando las partes reales e imaginarias de la solución compleja se obtiene soluciones reales de (21), en efecto:

$$\begin{cases} z_1(t) = x_1(t) + ix_2(t) \\ z_2(t) = y_1(t) + iy_2(t) \end{cases}, \text{ por (23) }, \begin{pmatrix} x_1(t) + ix_2(t) \\ y_1(t) + iy_2(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t}e^{i\beta}\begin{pmatrix} x_1 + ix_2 \\ y_1 + iy_2 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\operatorname{sen}\beta t)\begin{pmatrix} x_1 + ix_2 \\ y_1 + iy_2 \end{pmatrix}$$

$$= e^{\alpha t}\begin{pmatrix} x_1\cos\beta t - x_2\operatorname{sen}\beta t + i(x_1\operatorname{sen}\beta t + x_2\cos\beta t) \\ y_1\cos\beta t - y_2\operatorname{sen}\beta t + i(y_1\operatorname{sen}\beta t + y_2\cos\beta t) \end{pmatrix}$$

Luego :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} x_1\cos\beta t - x_2\operatorname{sen}\beta t \\ y_1\cos\beta t - y_2\operatorname{sen}\beta t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} x_1\operatorname{sen}\beta t + x_2\cos\beta t \\ y_1\operatorname{sen}\beta t + y_2\cos\beta t \end{pmatrix}$$

En particular

$$t = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1(0) \\ y_1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Por el Principio de Superposición de soluciones, una solución general real está dada por:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 1. *En un plano con coordenadas adecuadas. Determinar los tipos de puntos de equilibrio y hacer un bosquejo cualitativo de los planos de fases de los sistemas que se indican. ¿ Cuáles son las ecuaciones paramétricas de las respectivas soluciones ?.*

$$\begin{array}{llll} a) & \dot{x} = 2x + y & , & \dot{y} = x + 2y \\ b) & \dot{x} = 2x + y & , & \dot{y} = x - 3y \\ c) & \dot{x} = x - 4y & , & \dot{y} = 2x - y \\ d) & \dot{x} = 2y & , & \dot{y} = -3x - y \\ e) & \dot{x} = -x + 8y & , & \dot{y} = -2x + 7y \end{array}$$

Ejercicio 2. *Hallar el punto de equilibrio del sistema*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 2y + 10 \\ \frac{dy}{dt} = 11x - 8y + 49 \end{cases}$$

Considere el sistema equivalente por traslación de tal suerte que el punto de equilibrio coincida con el origen del sistema de coordenadas. Determine el tipo de punto de equilibrio y haga un bosquejo cualitativo del plano de fases.

Ejercicio 3. *Sea el sistema*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & x - y \\ \dot{y} & = & \mu y \end{array} \right. \quad , \ \mu \in \mathbb{R}$$

Dependiendo de los valores del parámetro μ, **discuta** *cualitativamente los planos de fases* **no-equivalentes** *que admite el sistema.*

Problema 1. *Suponga un modelo sencillo de las ventas de un producto de dos empresas en competencias A y B respectivamente. Sea $a > 0$ (resp. $b > 0$) una constante que mide la respectiva desconfianza de una empresa respecto de la otra.*

De acuerdo con el modelo " la razón de cambio de las ventas $x = x(t)$ (resp. $y = y(t)$) respecto del tiempo de la empresa A (resp. B) es igual a la constante de desconfianza a (resp. b) más dos veces (resp. una vez) las ventas de la otra empresa, menos dos veces (resp. tres veces) las ventas de la misma empresa.

i) *¿ Cuál es el sistema de ecuaciones que modela las ventas del producto ?.*
ii) *¿ El modelo tiene puntos de equilibrio ?*
iii) *Describa cualitativamente el plano de fases del modelo.*
iv) *Si en un instante inicial , ambas empresas lanzan su producto al mercado. ¿ Qué puede decir, a largo plazo, lo que ocurre con las ventas ?.*
v) *¿ Cuál empresa vende más a largo plazo ?.*

Problema 2. *Un sistema masa-resorte, en un tiempo t, se puede describir por la posición $y(t)$ de la masa y su momentum $p(t)$. Si en cada instante, el momentum es cuatro veces la rapidez de variacion del desplazamiento de la masa y además el momentum mas diecisiete veces el desplazamiento es igual a menos la rapidez de variación del momentum. Entonces :*

i) *¿ Cuál es el* **sistema de ecuaciones** *que modela el sistema masa-resorte ?*
ii) *¿ Cuáles son los puntos de equilibrio del sistema i) ?*
iii) *Describa cualitativamente el plano de fases del sistema i)*
iv) *Si inicialmente el momentum es nulo y el desplazamiento es positivo. ¿ Cuántas veces se repite esta situacion ?*

Problema 3. *Suponga un modelo sencillo sobre las ventas de un producto en competencia, de dos empresas X, Y. Sean $x = x(t)$ (respectivamente $y = y(t)$) las ventas en cada instante de las respectivas empresas. Según el modelo la rapidez de cambio (debida a la desconfianza de una empresa respecto de la otra) de las ventas es igual 5 (resp. 7), menos cuatro (resp. menos uno) las ventas de la misma empresa, más una vez (resp. menos dos veces) las ventas de la otra empresa.*

i) *¿ Cuál es el sistema de ecuaciones que modelo la competencia ?.*

ii) *Si existen rectas invariantes ¿ Cuáles son sus ecuaciones ?.*
iii) *A largo plazo. ¿ La competencia encuentra un estado de equilibrio*

Problema 4. *Suponga que en el mercado existen dos empresas* X, Y *que compiten por las ventas de celulares. Sean* $x = x(t), y = y(t)$ *las ventas en cada instante de las empresas* X, Y *respectivamente (medidas en cientos de aparatos) . Por sondeos de mercado, se estima que la rapidez del cambio de las ventas de los aparatos están dadas por:* $-4x + y + 3$ *para la empresa* X *y por* $-x - 2y + 3$ *para la empresa* Y*.*

i) *Establezca el sistema que modela las ventas del mercado y su Plano de Fases.*
ii) *Si en el instante inicial* $x(0) = 1, y(0) = 0$*. ¿ A largo plazo ambas empresas llegan a vender la misma cantidad de aparatos ?.*
iii) *Si en el instante inicial* $x(0) = y(0) = 3$*. ¿ Existe algún instante posterior donde los aparatos vendidos por la empresa* Y *superen a las ventas de la empresa* X*.*

References

[1] D.K.Arrowsmith & C.M.Place. *Ordinary differential equations.* Chapman and Hall . London, New York. 1982

[2] . P.Blanchard, R.L.Devaney and G.R.Hall. *Ecuaciones diferenciales.* Boston University.International Thomson Editores. 1998

[3] . Jacob Palis Jr., Welington de Melo. *Intodução aos sistemas dinâmicos.* IMPA, Rio de Janeiro, Brasil. Proyecto Euclides. 1977.

[4] . Jorge Sotomayor. *Liçóes de equaçóes diferenciais ordinárias.* IMPA, Rio de Janeiro, Brasil. Proyecto Euclides. 1979.

[5] . E. Sáez .*Ecuaciones Diferenciales de Variables Separables, Estudio cualitativo.* Notas en http://docencia.mat.utfsm.cl/ $\sim$ esaez