

FORMAS NORMALES

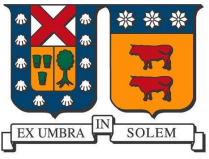
NOCIONES

Eduardo Sáez

eduardo.saez@usm.cl

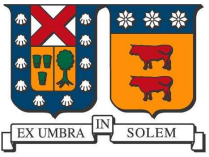
Universidad Técnica Federico Santa María

Departamento de Matemática



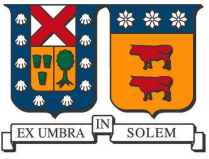
- Dado un campo de vectores. ¿ Es posible encontrar una sucesión de cambios de coordenadas tales que **ELIMINEN** los términos norelevantes (noresonantes) ?

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin



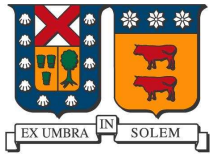
- Dado un campo de vectores. ¿ Es posible encontrar una sucesión de cambios de coordenadas tales que **ELIMINEN** los términos no relevantes (no resonantes) ?
- **Respuesta Partial** Por el Teorema de Hartman en el caso hiperbólico se sabe que existe un cambio de coordenadas que **ELIMINA** todos los términos no resonantes

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin



- Dado un campo de vectores. ¿ Es posible encontrar una sucesión de cambios de coordenadas tales que **ELIMINEN** los términos no relevantes (no resonantes) ?
- **Respuesta Partial** Por el Teorema de Hartman en el caso hiperbólico se sabe que existe un cambio de coordenadas que **ELIMINA** todos los términos no resonantes
- ¿ Caso no hiperbólico ?

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin



Campo de Vectores Polinomiales Homogeneos

- H_k , designa el Espacio Vectorial de Campos de Vectores cuyas componentes son **polinomios homogeneos del mismo grado k** .

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin

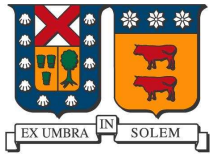


Campo de Vectores Polinomiales Homogeneos

- H_k , designa el Espacio Vectorial de Campos de Vectores cuyas componentes son **polinomios homogeneos del mismo grado k** .

- Ejemplo: $B_2 = \left\{ x^2 \frac{\partial}{\partial x}, xy \frac{\partial}{\partial x}, y^2 \frac{\partial}{\partial x}, x^2 \frac{\partial}{\partial y}, xy \frac{\partial}{\partial y}, y^2 \frac{\partial}{\partial y} \right\}$ es la base canónica de H_2 .

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin



Campo de Vectores Polinomiales Homogeneos

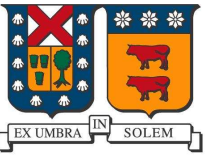
- H_k , designa el Espacio Vectorial de Campos de Vectores cuyas componentes son **polinomios homogeneos del mismo grado k** .

- Ejemplo: $B_2 = \left\{ x^2 \frac{\partial}{\partial x}, xy \frac{\partial}{\partial x}, y^2 \frac{\partial}{\partial x}, x^2 \frac{\partial}{\partial y}, xy \frac{\partial}{\partial y}, y^2 \frac{\partial}{\partial y} \right\}$ es la base canónica de H_2 .

- Sea la aplicación lineal $L = DX(0)x$ y consideremos el Corchete de Lie

$$[\cdot, L] : H_k \rightarrow H_k , \text{ tal que } , [Y, L] = (DL)Y - (DY)L$$

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin



- El corchete de Lie, claramente es bilineal y explícitamente tiene la forma:

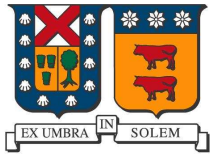
- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin

- El corchete de Lie, claramente es bilineal y explícitamente tiene la forma:



$$\left[\begin{pmatrix} Y^1 \\ \vdots \\ Y^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L^1 \\ \vdots \\ L^n \end{pmatrix} \right] := \begin{pmatrix} \frac{\partial L^1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial L^1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial L^n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial L^n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^1 \\ \vdots \\ Y^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial Y^1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial Y^1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Y^n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial Y^n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^1 \\ \vdots \\ L^n \end{pmatrix}$$

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin



Teorema de Forma Normal

- Sea $\dot{x} = X(x)$, C^r , $X(0) = 0$, $DX(0)x = L$, y el corchete de Lie $[\cdot, L] : H_k \rightarrow H_k$, transformación lineal.

Sea G_k el subespacio vectorial **COMPLEMENTARIO** de la imagen $[H_k, L]$ en H_k , es decir, la imagen se puede escribir

$$H_k = [H_k, L] \oplus G_k.$$

Entonces, **existe un Cambio de Coordenadas analítico**

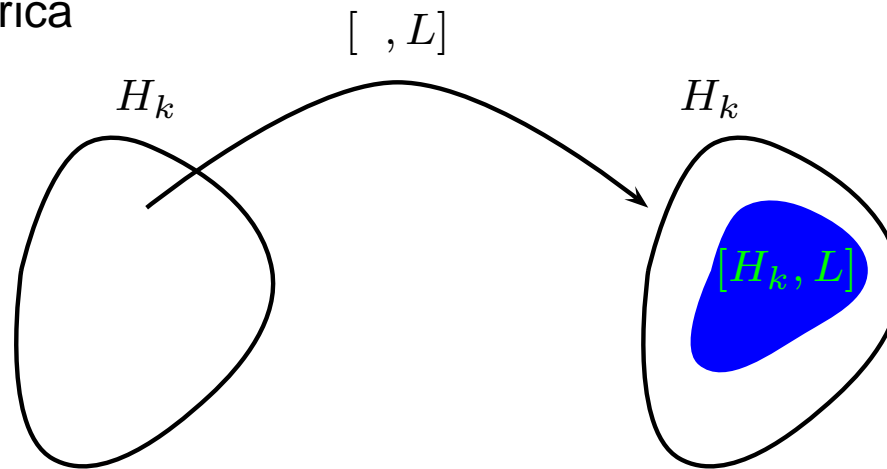
$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que el sistema $\dot{x} = X(x)$ en las nuevas coordenadas tiene la forma

$$\dot{y} = g^{(1)}(y) + g^{(2)}(y) + \cdots + g^{(r)}(y) + R_r,$$

donde $L = g^{(1)}(y)$, $g^k \in G_k$, $2 \leq k \leq r$, $R_r = O(|y|^r)$

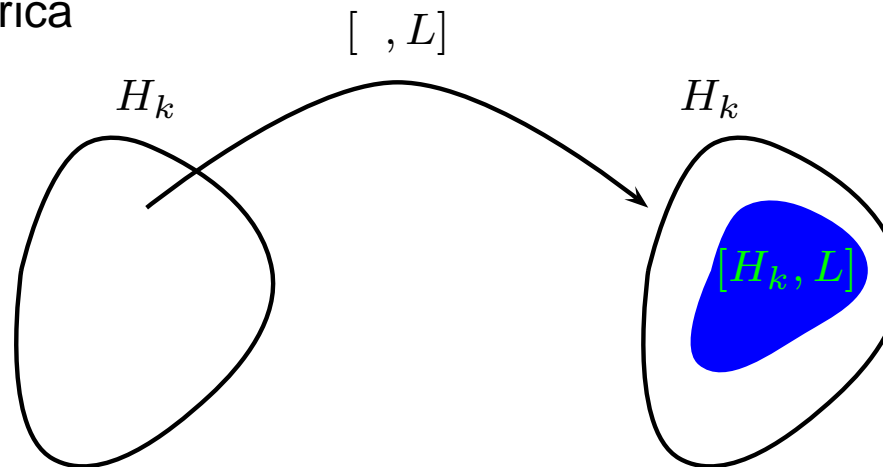
- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin

■ Idea geométrica



- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin

■ Idea geométrica

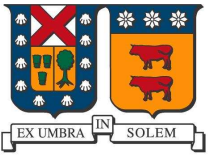


- Supongamos que $\dot{x} = X(x)$ ya a sido transformado, donde los términos de grado $< s$ pertenecen al subespacio complementario $G_i, 2 \leq i < s$, es decir ,

$$\dot{x} = g^{(1)}(x) + g^{(2)}(x) + \dots + g^{(s-1)}(x) + R_s(x),$$

con $g^{(i)}(x) \in G_i, 2 \leq i < s, J_{s-1}R_s(0) = 0$

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin

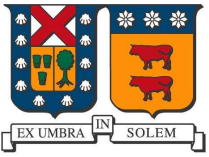


Cambio de coordenadas

- Sea el cambio de coordenadas $x = h(y) = y + P(y)$, donde P es un polinomio homogéneo de grado s con coeficientes por determinar. Sustituyendo en el sistema $\dot{x} = X(x)$ se tiene:

$$(I + DP(y))\dot{y} = g^{(1)}(y + P(y)) + g^{(2)}(y + P(y)) + \cdots + g^{(s-1)}(y + P(y)) + R_s(y + P(y))$$

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin



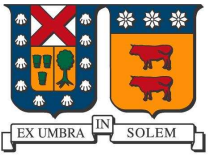
Cambio de coordenadas

- Idea
 - Campo
 - Lie
 - teo
 - dem
 - cambio1
 - cambio2
 - finccor
 - desa
 - cal
 - calcon
 - resumen
 - matriz
 - cus
 - corchete
 - dim
 - fin
- Sea el cambio de coordenadas $x = h(y) = y + P(y)$, donde P es un polinomio homogéneo de grado s con coeficientes por determinar. Sustituyendo en el sistema $\dot{x} = X(x)$ se tiene:

$$(I + DP(y))\dot{y} = g^{(1)}(y + P(y)) + g^{(2)}(y + P(y)) + \dots + g^{(s-1)}(y + P(y)) + R_s(y + P(y))$$

- Pero,
$$\begin{cases} g^{(1)}(y + P(y)) &= DX(0)(y + P(y)) \\ &= DX(0)y + DX(0)P(y) \\ &= g^{(1)}(y) + DX(0)P(y). \end{cases}$$

Nótese que $DX(0)P(y)$ son términos de grado s y los términos de grado menor que s , en este caso $g^{(1)}(y)$, permanecen invariantes bajo el cambio de coordenadas.



Cambio de coordenadas

- Sea el cambio de coordenadas $x = h(y) = y + P(y)$, donde P es un polinomio homogéneo de grado s con coeficientes por determinar. Sustituyendo en el sistema $\dot{x} = X(x)$ se tiene:

$$(I + DP(y))\dot{y} = g^{(1)}(y + P(y)) + g^{(2)}(y + P(y)) + \dots + g^{(s-1)}(y + P(y)) + R_s(y + P(y))$$

- Pero,
$$\begin{cases} g^{(1)}(y + P(y)) & = DX(0)(y + P(y)) \\ & = DX(0)y + DX(0)P(y) \\ & = g^{(1)}(y) + DX(0)P(y). \end{cases}$$

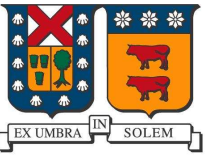
Nótese que $DX(0)P(y)$ son términos de grado s y los términos de grado menor que s , en este caso $g^{(1)}(y)$, permanecen invariantes bajo el cambio de coordenadas.

- Luego

$$(I + DP(y))\dot{y} = g^{(1)}(y) + g^{(2)}(y) + \dots + g^{(s-1)}(y) + g^{(s)}(y) + DX(0)P(y) + O(|y|^s),$$

con $g^{(s)}(y)$ términos de grado s de $R_s(y)$.

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin



Cambio de coordenadas, continuación

- Despejando simplemente

$$\dot{y} = (I + DP(y))^{-1} [g^{(1)}(y) + g^{(2)}(y) + \dots + g^{(s-1)}(y) + g^{(s)}(y) + DX(0)P(y) + O(|y|^s)]$$

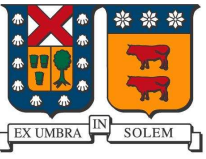
Entonces

$$\dot{y} = (I - DP(y)) [g^{(1)}(y) + g^{(2)}(y) + \dots + g^{(s-1)}(y) + g^{(s)}(y) + DX(0)P(y) + O(|y|^s)]$$

de donde

$$\dot{y} = g^{(1)}(y) + g^{(2)}(y) + \dots + g^{(s-1)}(y) + \text{términos de grado } s + O(|y|^s).$$

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin



Cambio de coordenadas, continuación

- Despejando simplemente

$$\dot{y} = (I + DP(y))^{-1} [g^{(1)}(y) + g^{(2)}(y) + \dots + g^{(s-1)}(y) + g^{(s)}(y) + DX(0)P(y) + O(|y|^s)]$$

Entonces

$$\dot{y} = (I - DP(y)) [g^{(1)}(y) + g^{(2)}(y) + \dots + g^{(s-1)}(y) + g^{(s)}(y) + DX(0)P(y) + O(|y|^s)]$$

de donde

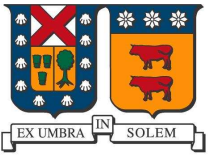
$$\dot{y} = g^{(1)}(y) + g^{(2)}(y) + \dots + g^{(s-1)}(y) + \text{términos de grado } s + O(|y|^s).$$

- Donde los términos de grado s , están dados por:

$$T.G.s = g^{(s)}(y) + DX(0)P(y) - DP(y)g^{(1)}(y),$$

pero $L = DX(0)x \Rightarrow DL = DX(0)$, $g^{(1)}(y) = L$

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin

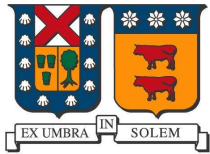


Fin de la demostración

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin

■ Luego ,

$$\left\{ \begin{array}{l} T.G.s = g^{(s)}(y) + \underbrace{(DL)P(y) - (DP(y))L}_{\text{Corchete de Lie}} \\ = g^{(s)}(y) + \underbrace{[P(y), L]}_{\text{imágen de } P(y)} \end{array} \right.$$



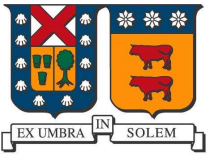
Fin de la demostración

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin

■ Luego ,

$$\left\{ \begin{aligned} T.G.s &= g^{(s)}(y) + \underbrace{(DL)P(y) - (DP(y))L}_{\text{Corchete de Lie}} \\ &= g^{(s)}(y) + \underbrace{[P(y), L]}_{\text{imágen de } P(y)} \end{aligned} \right.$$

- Entonces, $g^{(s)} \in G_s$ pues sabemos que es suma directa con la imágen del corchete de Lie. \square



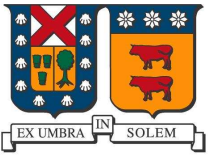
Fin de la demostración

■ Luego ,

$$\left\{ \begin{array}{l} T.G.s = g^{(s)}(y) + \underbrace{(DL)P(y) - (DP(y))L}_{\text{Corchete de Lie}} \\ = g^{(s)}(y) + \underbrace{[P(y), L]}_{\text{imágen de } P(y)} \end{array} \right.$$

- Entonces, $g^{(s)} \in G_s$ pues sabemos que es suma directa con la imágen del corchete de Lie. \square
- Comentario: Por la demostración bosquejada, los sucesivos cambios de coordenadas introducen términos adicionales de orden superior en cada etapa.

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin



Fin de la demostración

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin

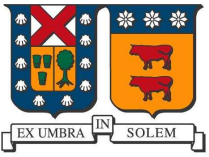
■ Luego ,

$$\left\{ \begin{aligned} T.G.s &= g^{(s)}(y) + \underbrace{(DL)P(y) - (DP(y))L}_{\text{Corchete de Lie}} \\ &= g^{(s)}(y) + \underbrace{[P(y), L]}_{\text{imágen de } P(y)} \end{aligned} \right.$$

- Entonces, $g^{(s)} \in G_s$ pues sabemos que es suma directa con la imágen del corchete de Lie. \square
- Comentario: Por la demostración bosquejada, los sucesivos cambios de coordenadas introducen términos adicionales de orden superior en cada etapa.
- **Ejemplo:** Supongamos el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + T.O.S. \\ \dot{y} &= x + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + T.O.S. \end{cases}$$

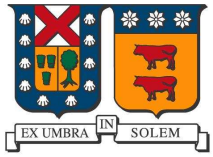
El origen es una singularidad Monodrómica y claramente no está en forma normal.



Desarrollo del ejemplo monodrómico

- La parte lineal está dada por:
$$DX(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- **desa**
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin

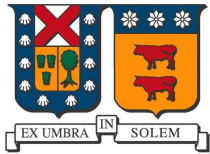


Desarrollo del ejemplo monodrómico

- La parte lineal está dada por: $DX(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- Los valores propios son : $\pm i$.

$$\text{Además, } L = DX(0)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- **desa**
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin



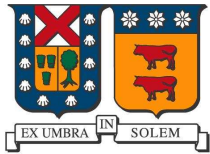
Desarrollo del ejemplo monodrómico

- La parte lineal está dada por: $DX(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- Los valores propios son : $\pm i$.

$$\text{Además, } L = DX(0)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

- El corchete de Lie está dado por: $[\cdot, L] : H_2 \rightarrow H_2$,
donde H_2 es el Espacio Vectorial de campos de vectores polinomiales homogéneos de grado 2

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- **desa**
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin



Desarrollo del ejemplo monodrómico

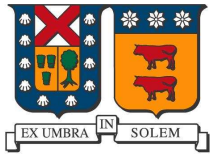
- La parte lineal está dada por: $DX(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- Los valores propios son : $\pm i$.

$$\text{Además, } L = DX(0)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

- El corchete de Lie está dado por: $[\cdot, L] : H_2 \rightarrow H_2$,
donde H_2 es el Espacio Vectorial de campos de vectores polinomiales homogéneos de grado 2
- Sea la base canónica de H_2

$$\mathcal{B} = \{(x^2, 0), (xy, 0), (y^2, 0), (0, x^2), (0, xy), (0, y^2)\}$$

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- **desa**
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin



Desarrollo del ejemplo monodrómico

- La parte lineal está dada por: $DX(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- Los valores propios son : $\pm i$.

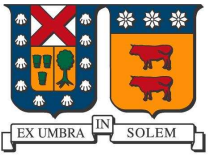
$$\text{Además , } L = DX(0)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

- El corchete de Lie está dado por: $[\cdot, L] : H_2 \rightarrow H_2$,
donde H_2 es el Espacio Vectorial de campos de vectores polinomiales homogéneos de grado 2
- Sea la base canónica de H_2

$$\mathcal{B} = \{(x^2, 0), (xy, 0), (y^2, 0), (0, x^2), (0, xy), (0, y^2)\}$$

- Por la linealidad del corchete $[\cdot, \cdot]$, basta buscar las imágenes de los vectores de la base.

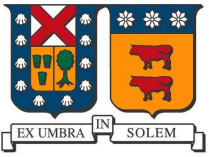
- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- **desa**
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin



Cálculos de las imágenes

$$\blacksquare \left[\begin{pmatrix} X_1(x, y) \\ X_2(x, y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x} & \frac{\partial X_1}{\partial y} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x} & \frac{\partial X_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin



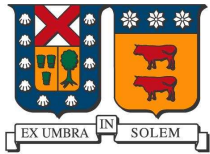
Cálculos de las imágenes

$$\blacksquare \left[\begin{pmatrix} X_1(x, y) \\ X_2(x, y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x} & \frac{\partial X_1}{\partial y} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x} & \frac{\partial X_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

■ Entonces, las imágenes de los elementos de la base son:

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2xy \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin



Cálculos de las imágenes

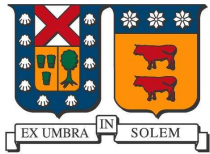
- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin

$$\blacksquare \left[\begin{pmatrix} X_1(x, y) \\ X_2(x, y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x} & \frac{\partial X_1}{\partial y} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x} & \frac{\partial X_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

■ Entonces, las imágenes de los elementos de la base son:

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2xy \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \left[\begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -y^2 + x^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ xy \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Cálculos de las imágenes

$$\blacksquare \left[\begin{pmatrix} X_1(x, y) \\ X_2(x, y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x} & \frac{\partial X_1}{\partial y} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x} & \frac{\partial X_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

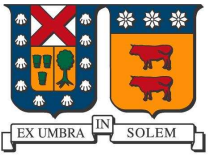
■ Entonces, las imágenes de los elementos de la base son:

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2xy \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \left[\begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -y^2 + x^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ xy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \left[\begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2xy \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2xy \\ y^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

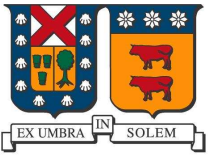
- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin



Continuación del cálculos de las imágenes

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

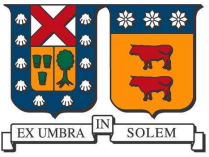
- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin



Continuación del cálculos de las imágenes

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \left[\begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \\ \blacksquare \quad \left[\begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -xy \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -y^2 + x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xy \\ y^2 - x^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin



Continuación del cálculos de las imágenes

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \left[\begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \left[\begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -xy \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -y^2 + x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xy \\ y^2 - x^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \left[\begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -y^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^2 \\ -2xy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

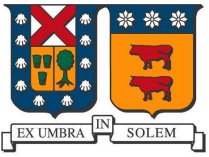


Tabla de resumen

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin

- El cálculo de las imágenes de la base \mathcal{B}_2 de H_2 , bajo el corchete de Lie $[\cdot, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}]$ se resumen en la siguiente tabla:

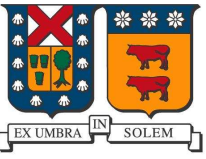


Tabla de resumen

- El cálculo de las imágenes de la base \mathcal{B}_2 de H_2 , bajo el corchete de Lie $[\cdot, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}]$ se resumen en la siguiente tabla:

$[\cdot, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}]$	x^2	xy	y^2
$\frac{\partial}{\partial x}$	$2xy \frac{\partial}{\partial x} + x^2 \frac{\partial}{\partial y}$	$(y^2 - x^2) \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}$	$-2xy \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}$
$\frac{\partial}{\partial y}$	$-x^2 \frac{\partial}{\partial x} + 2xy \frac{\partial}{\partial y}$	$-xy \frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - x^2) \frac{\partial}{\partial y}$	$-y^2 \frac{\partial}{\partial x} - 2xy \frac{\partial}{\partial y}$

-

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin

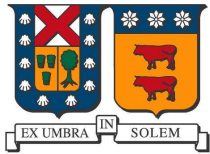


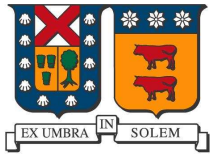
Tabla de resumen

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin

- El cálculo de las imágenes de la base \mathcal{B}_2 de H_2 , bajo el corchete de Lie $[\cdot, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}]$ se resumen en la siguiente tabla:

$[\cdot, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}]$	x^2	xy	y^2
$\frac{\partial}{\partial x}$	$2xy \frac{\partial}{\partial x} + x^2 \frac{\partial}{\partial y}$	$(y^2 - x^2) \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}$	$-2xy \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}$
$\frac{\partial}{\partial y}$	$-x^2 \frac{\partial}{\partial x} + 2xy \frac{\partial}{\partial y}$	$-xy \frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - x^2) \frac{\partial}{\partial y}$	$-y^2 \frac{\partial}{\partial x} - 2xy \frac{\partial}{\partial y}$

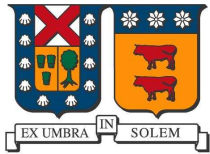
- Sea $\mathcal{A} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_2}([\cdot, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}])$ la matriz asociada a la transformación lineal $[\cdot, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}]$ respecto de las bases \mathcal{B}_2 . Explícitamente \mathcal{A} está dada por:



Matriz asociada

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin

	$x^2 \frac{\partial}{\partial x}$	$xy \frac{\partial}{\partial x}$	$y^2 \frac{\partial}{\partial x}$	$x^2 \frac{\partial}{\partial y}$	$xy \frac{\partial}{\partial y}$	$y^2 \frac{\partial}{\partial y}$
$x^2 \frac{\partial}{\partial x}$	0	-1	0	-1	0	0
$xy \frac{\partial}{\partial x}$	2	0	-2	0	-1	0
$y^2 \frac{\partial}{\partial x}$	0	1	0	0	0	-1
$x^2 \frac{\partial}{\partial y}$	1	0	0	0	-1	0
$xy \frac{\partial}{\partial y}$	0	1	0	2	0	-2
$y^2 \frac{\partial}{\partial y}$	0	0	1	0	1	0



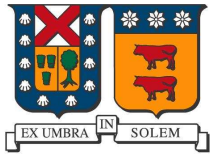
Matriz asociada

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin

	$x^2 \frac{\partial}{\partial x}$	$xy \frac{\partial}{\partial x}$	$y^2 \frac{\partial}{\partial x}$	$x^2 \frac{\partial}{\partial y}$	$xy \frac{\partial}{\partial y}$	$y^2 \frac{\partial}{\partial y}$
$x^2 \frac{\partial}{\partial x}$	0	-1	0	-1	0	0
$xy \frac{\partial}{\partial x}$	2	0	-2	0	-1	0
$y^2 \frac{\partial}{\partial x}$	0	1	0	0	0	-1
$x^2 \frac{\partial}{\partial y}$	1	0	0	0	-1	0
$xy \frac{\partial}{\partial y}$	0	1	0	2	0	-2
$y^2 \frac{\partial}{\partial y}$	0	0	1	0	1	0

- Por cálculo directo $\det(\mathcal{A}) \neq 0$, en consecuencia la transformación lineal $[\cdot, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}]$ es un isomorfismo.

$$\text{Además, } \begin{cases} [H_2, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}] & = H_2 \\ G_2 & = \{\vec{0}\} \end{cases}$$



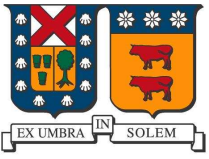
- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin

	$x^2 \frac{\partial}{\partial x}$	$xy \frac{\partial}{\partial x}$	$y^2 \frac{\partial}{\partial x}$	$x^2 \frac{\partial}{\partial y}$	$xy \frac{\partial}{\partial y}$	$y^2 \frac{\partial}{\partial y}$
$x^2 \frac{\partial}{\partial x}$	0	-1	0	-1	0	0
$xy \frac{\partial}{\partial x}$	2	0	-2	0	-1	0
$y^2 \frac{\partial}{\partial x}$	0	1	0	0	0	-1
$x^2 \frac{\partial}{\partial y}$	1	0	0	0	-1	0
$xy \frac{\partial}{\partial y}$	0	1	0	2	0	-2
$y^2 \frac{\partial}{\partial y}$	0	0	1	0	1	0

- Por cálculo directo $\det(\mathcal{A}) \neq 0$, en consecuencia la transformación lineal $[\cdot, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}]$ es un isomorfismo.

Además,
$$\begin{cases} [H_2, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}] & = H_2 \\ G_2 & = \{\vec{0}\} \end{cases}$$

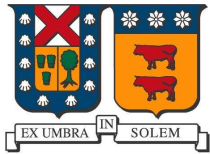
- Luego, todos los términos cuadráticos del campo de vectores se pueden eliminar por cambio de coordenadas.



Forma normal de la Cúspide

- Sea un campo de vectores polinomial (con suficiente diferenciabilidad), tal que en el origen, existe una singularidad de tipo Cúspide de codimensión dos.

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin

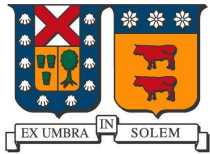


Forma normal de la Cúspide

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin

- Sea un campo de vectores polinomial (con suficiente diferenciabilidad), tal que en el origen, existe una singularidad de tipo Cúspide de codimensión dos.
- Supondremos que por cambio de coordenadas la parte lineal tiene la forma:

$$DX(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Forma normal de la Cúspide

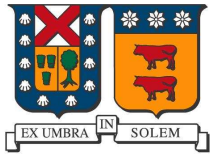
- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin

- Sea un campo de vectores polinomial (con suficiente diferenciabilidad), tal que en el origen, existe una singularidad de tipo Cúspide de codimensión dos.

- Supondremos que por cambio de coordenadas la parte lineal tiene la forma:

$$DX(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- D. k Arrowsmith en [2] , usando la técnica del blowing-up, demostró que para campos de vectores polinomiales con la parte lineal anterior, sólo existen 7 configuraciones C^0 -equivalentes. Además demostró que la cúspide es la única singularidad en codimensión dos.



Forma normal de la Cúspide

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin

- Sea un campo de vectores polinomial (con suficiente diferenciabilidad), tal que en el origen, existe una singularidad de tipo Cúspide de codimensión dos.

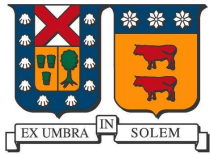
- Supondremos que por cambio de coordenadas la parte lineal tiene la forma:

$$DX(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- D. k Arrowsmith en [2], usando la técnica del blowing-up, demostró que para campos de vectores polinomiales con la parte lineal anterior, sólo existen 7 configuraciones C^0 -equivalentes. Además demostró que la cúspide es la única singularidad en codimensión dos.

- Entonces el campo de vectores es del tipo:

$$X : \begin{cases} \dot{x} & = & y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + T.O.S. \\ \dot{y} & = & b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + T.O.S. \end{cases}$$



Forma normal de la Cúspide

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- **cus**
- corchete
- dim
- fin

- Sea un campo de vectores polinomial (con suficiente diferenciabilidad), tal que en el origen, existe una singularidad de tipo Cúspide de codimensión dos.

- Supondremos que por cambio de coordenadas la parte lineal tiene la forma:

$$DX(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

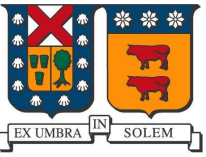
- D. k Arrowsmith en [2], usando la técnica del blowing-up, demostró que para campos de vectores polinomiales con la parte lineal anterior, sólo existen 7 configuraciones C^0 -equivalentes. Además demostró que la cúspide es la única singularidad en codimensión dos.

- Entonces el campo de vectores es del tipo:

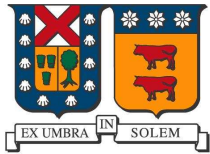
$$X : \begin{cases} \dot{x} & = y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + T.O.S. \\ \dot{y} & = b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + T.O.S. \end{cases}$$

- Sea la aplicación lineal, $L = DX(0)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$, o bien,

usando la notación para campo de vectores en el Espacio Tangente, $L = y \frac{\partial}{\partial x}$



- Idea
 - Campo
 - Lie
 - teo
 - dem
 - cambio1
 - cambio2
 - finccor
 - desa
 - cal
 - calcon
 - resumen
 - matriz
 - cus
 - corchete
 - dim
 - fin
- Sea el corchete de Lie: $[\cdot, L] : H_2 \rightarrow H_2$,
donde H_2 es el Espacio Vectorial de campos de vectores polinomiales
homogeneos de grado 2.



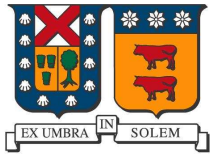
- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin

- Sea el corchete de Lie: $[\cdot, L] : H_2 \rightarrow H_2$,
donde H_2 es el Espacio Vectorial de campos de vectores polinomiales
homogeneos de grado 2.

- Sea la base canónica de H_2

$$\mathcal{B} = \{(x^2, 0), (xy, 0), (y^2, 0), (0, x^2), (0, xy), (0, y^2)\}$$

Por la linealidad del corchete $[\cdot, L]$, basta buscar bajo L , las imágenes de los
vectores de la base.



- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin

- Sea el corchete de Lie: $[\cdot, L] : H_2 \rightarrow H_2$,
donde H_2 es el Espacio Vectorial de campos de vectores polinomiales homogéneos de grado 2.

- Sea la base canónica de H_2

$$\mathcal{B} = \{(x^2, 0), (xy, 0), (y^2, 0), (0, x^2), (0, xy), (0, y^2)\}$$

Por la linealidad del corchete $[\cdot, L]$, basta buscar bajo L , las imágenes de los vectores de la base.

- Efectuando los cálculos, las imágenes de los vectores de la base \mathcal{B} por el corchete de Lie se resumen en la siguiente tabla:



- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin

- Sea el corchete de Lie: $[\cdot, L] : H_2 \rightarrow H_2$,
donde H_2 es el Espacio Vectorial de campos de vectores polinomiales homogéneos de grado 2.

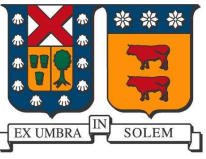
- Sea la base canónica de H_2

$$\mathcal{B} = \{(x^2, 0), (xy, 0), (y^2, 0), (0, x^2), (0, xy), (0, y^2)\}$$

Por la linealidad del corchete $[\cdot, L]$, basta buscar bajo L , las imágenes de los vectores de la base.

- Efectuando los cálculos, las imágenes de los vectores de la base \mathcal{B} por el corchete de Lie se resumen en la siguiente tabla:

$[\cdot, y \frac{\partial}{\partial x}]$	x^2	xy	y^2
$\frac{\partial}{\partial x}$	$-2xy \frac{\partial}{\partial x}$	$-y^2 \frac{\partial}{\partial x}$	0
$\frac{\partial}{\partial y}$	$x^2 \frac{\partial}{\partial x} - 2xy \frac{\partial}{\partial y}$	$xy \frac{\partial}{\partial x} - y^2 \frac{\partial}{\partial y}$	$y^2 \frac{\partial}{\partial x}$

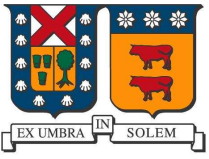


Dimensión de la Imágen

- Por la tabla anterior, la imágen de H_2 por el corchete de Lie está generada por:

$$\left[H_2, y \frac{\partial}{\partial x} \right] = \left\langle \left\{ -2xy \frac{\partial}{\partial x}, -y^2 \frac{\partial}{\partial x}, x^2 \frac{\partial}{\partial x} - 2xy \frac{\partial}{\partial y}, xy \frac{\partial}{\partial x} - y^2 \frac{\partial}{\partial y}, y^2 \frac{\partial}{\partial x} \right\} \right\rangle$$

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin



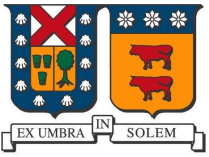
Dimensión de la Imágen

- Por la tabla anterior, la imágen de H_2 por el corchete de Lie está generada por:

$$\left[H_2, y \frac{\partial}{\partial x} \right] = \left\langle \left\{ -2xy \frac{\partial}{\partial x}, -y^2 \frac{\partial}{\partial x}, x^2 \frac{\partial}{\partial x} - 2xy \frac{\partial}{\partial y}, xy \frac{\partial}{\partial x} - y^2 \frac{\partial}{\partial y}, y^2 \frac{\partial}{\partial x} \right\} \right\rangle$$

- Nótese que los vectores que generan la imágen $\left[H_2, y \frac{\partial}{\partial x} \right]$, son Linealmente Dependientes.

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin



Dimensión de la Imágen

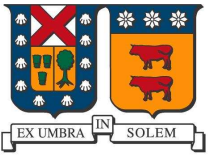
- Por la tabla anterior, la imágen de H_2 por el corchete de Lie está generada por:

$$\left[H_2, y \frac{\partial}{\partial x} \right] = \left\langle \left\{ -2xy \frac{\partial}{\partial x}, -y^2 \frac{\partial}{\partial x}, x^2 \frac{\partial}{\partial x} - 2xy \frac{\partial}{\partial y}, xy \frac{\partial}{\partial x} - y^2 \frac{\partial}{\partial y}, y^2 \frac{\partial}{\partial x} \right\} \right\rangle$$

- Nótese que los vectores que generan la imágen $\left[H_2, y \frac{\partial}{\partial x} \right]$, son Linealmente Dependientes.
- Consideremos la base $\tilde{\mathcal{B}}$, de la imágen $\left[H_2, y \frac{\partial}{\partial x} \right]$ dada por :

$$\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ xy \frac{\partial}{\partial x}, y^2 \frac{\partial}{\partial x}, x^2 \frac{\partial}{\partial x} - 2xy \frac{\partial}{\partial y}, xy \frac{\partial}{\partial x} - y^2 \frac{\partial}{\partial y} \right\}$$

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin



Dimensión de la Imágen

- Por la tabla anterior, la imágen de H_2 por el corchete de Lie está generada por:

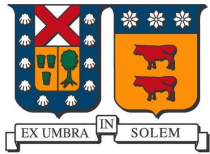
$$[H_2, y \frac{\partial}{\partial x}] = \left\langle \left\{ -2xy \frac{\partial}{\partial x}, -y^2 \frac{\partial}{\partial x}, x^2 \frac{\partial}{\partial x} - 2xy \frac{\partial}{\partial y}, xy \frac{\partial}{\partial x} - y^2 \frac{\partial}{\partial y}, y^2 \frac{\partial}{\partial x} \right\} \right\rangle$$

- Nótese que los vectores que generan la imágen $[H_2, y \frac{\partial}{\partial x}]$, son Linealmente Dependientes.
- Consideremos la base $\tilde{\mathcal{B}}$, de la imágen $[H_2, y \frac{\partial}{\partial x}]$ dada por :

$$\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ xy \frac{\partial}{\partial x}, y^2 \frac{\partial}{\partial x}, x^2 \frac{\partial}{\partial x} - 2xy \frac{\partial}{\partial y}, xy \frac{\partial}{\partial x} - y^2 \frac{\partial}{\partial y} \right\}$$

- $\dim([H_2, y \frac{\partial}{\partial x}]) = 4$. Entonces, $\dim(G_2) = 2$, donde $H_2 = [H_2, y \frac{\partial}{\partial x}] \oplus G_2$.

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin



Dimensión de la Imágen

- Por la tabla anterior, la imágen de H_2 por el corchete de Lie está generada por:

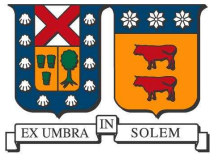
$$\left[H_2, y \frac{\partial}{\partial x} \right] = \left\langle \left\{ -2xy \frac{\partial}{\partial x}, -y^2 \frac{\partial}{\partial x}, x^2 \frac{\partial}{\partial x} - 2xy \frac{\partial}{\partial y}, xy \frac{\partial}{\partial x} - y^2 \frac{\partial}{\partial y}, y^2 \frac{\partial}{\partial x} \right\} \right\rangle$$

- Nótese que los vectores que generan la imágen $\left[H_2, y \frac{\partial}{\partial x} \right]$, son Linealmente Dependientes.
- Consideremos la base $\tilde{\mathcal{B}}$, de la imágen $\left[H_2, y \frac{\partial}{\partial x} \right]$ dada por :

$$\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ xy \frac{\partial}{\partial x}, y^2 \frac{\partial}{\partial x}, x^2 \frac{\partial}{\partial x} - 2xy \frac{\partial}{\partial y}, xy \frac{\partial}{\partial x} - y^2 \frac{\partial}{\partial y} \right\}$$

- $\dim\left(\left[H_2, y \frac{\partial}{\partial x} \right]\right) = 4$. Entonces, $\dim(G_2) = 2$, donde $H_2 = \left[H_2, y \frac{\partial}{\partial x} \right] \oplus G_2$.
- Una base clara para G_2 es , $\left\{ x^2 \frac{\partial}{\partial x}, x^2 \frac{\partial}{\partial y} \right\}$

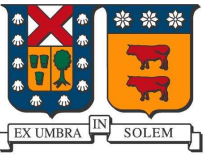
- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin



- Por el Teorema de Formas Normales, existe un cambio de coordenadas analítico $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que el sistema original en las nuevas coordenadas tiene la forma

$$\begin{cases} \dot{u} &= v + au^2 + T.O.S \\ \dot{v} &= bu^2 + T.O.S \end{cases}$$

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin



- Por el Teorema de Formas Normales, existe un cambio de coordenadas analítico $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que el sistema original en las nuevas coordenadas tiene la forma

$$\begin{cases} \dot{u} &= v + au^2 + T.O.S \\ \dot{v} &= bu^2 + T.O.S \end{cases}$$

- **Comentario:** Como la base de la imagen $[H_2, y \frac{\partial}{\partial x}]$ no es única, **las Formas Normales no son únicas**

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin

- Por el Teorema de Formas Normales, existe un cambio de coordenadas analítico $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que el sistema original en las nuevas coordenadas tiene la forma

$$\begin{cases} \dot{u} &= v + au^2 + T.O.S \\ \dot{v} &= bu^2 + T.O.S \end{cases}$$

- **Comentario:** Como la base de la imagen $[H_2, y \frac{\partial}{\partial x}]$ no es única , **las Formas Normales no son únicas**

■ References

- [1] Arnold V. : Chapitres Supplémentaires de la Théorie des Equations Différentielles Ordinaires, *Editions MIR-Moscou* , *traducido* , 1980.
- [2] Arrowsmith D. K. : The Singularity $x \frac{\partial}{\partial y}$, *Journal of Differential Equation* , **34** No. 2, p.153-166, 1979.
- [3] Guckenheimer J. and Holmes P.: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields* , Springer-Verlag.