FORMAS NORMALES
ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

E. SÁEZ

La idea general de la Teoría de Formas Normales consiste en encontrar un sistema de coordenadas donde una determinada expresión se reduce a una expresión equivalente que contiene sólo los términos más relevantes, por ejemplo, es conocido en el estudio de las cuadráticas reales en dos variables reales con coeficientes constantes, que existen traslaciones y rotaciones en el plano que permiten definir nuevas coordenadas donde la ecuación de la cuadrática no contiene el término mixto y no contiene al menos un término lineal ya que son irrelevantes para la forma cualitativa de la gráfica de la cuadrática. Dichas ecuaciones son llamadas Canónicas. Otro ejemplo conocido es en el estudio de las matrices cuadradas, donde se demuestra que existen bases adecuadas en los Espacios Vectoriales respectivos tales que mediante transformaciones lineales es posible representar la matriz en términos de los valores propios que son los números realmente relevantes de la matriz. Dichas matrices se dicen de Jordan.

La expresión general de una Ecuación Diferencial Parcial Lineal Real de Segundo Orden en dos variables, definida en un dominio Ω del plano en coordenadas cartesianas es de la forma

$$(1) \qquad \boxed{\begin{array}{c} a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + e(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + \\ f(x,y)u + g(x,y) = 0 \end{array}}$$

donde los coeficientes $a, b, c : \Omega \to \mathbb{R}$ son funciones en dos variables que admiten desarrollos de Taylor convergentes y no se anulan simultaneamente en Ω. Los coeficientes $d, e, f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ son funciones en dos variables y continuas.

Como la ecuación (1) es de segundo orden, veremos en lo que sigue que siempre es posible reducir los coeficientes de las derivadas de segundo orden a constantes muy simples mediante un cambio de coordenadas definidas por sistema de ecuaciones de la forma

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} \xi & = & \xi(x,y) \\ \eta & = & \eta(x,y) \end{array} \right. \qquad \text{con} \qquad \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \neq 0 \ , \ \forall (x,y) \in \Omega$$

tal que (1) en las nuevas coordenadas es equivalente a una de los siguientes tipos de ecuaciones más sencillas, llamadas **Formas Normales** , o bien , formas **Formas**

Departamento de Matemática, UTFSM
e–mail: eduardo.saez@usm.cl.

Canónicas de (1).

$$
(3) \qquad \textbf{FormasNormales}: \begin{cases} 1.a) & \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + T.O.I. = 0 \\ 1.b) & \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + T.O.I. = 0 \\ 2.a) & \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + T.O.I. = 0 \\ 2.b) & \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + T.O.I. = 0 \\ 3) & \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + T.O.I. = 0 \end{cases}
$$

donde $T.O.I.$, designa los términos de orden inferior al efectuar el cambio de coordenadas (2) a (1) para obtener (3).

Definición. Diremos que la ecuación (1) es de tipo **Hiperbólica, ó Parabólica, o bien, Elíptica**, si y sólo si existe un cambio de coordenadas tal que la ecuación se puede escribir en la Forma Normal **1., ó 2., o bien 3.**, respectivamente.

Nótese de (3) que no existe unicidad de Formas Normales. Además, las formas 1.), 2.) y 3.) son por definición de tipo Hiperbólicas, Parabólicas y Elíptica, respectivamente.

En Física e Ingeniería es frecuente encontrar las E.D.P.

$$
\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 & \text{Ecuación de Onda Unidimensional} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 & \text{Ecuación de Calor Unidimensional} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{Ecuación de Laplace Bidimensional} \end{cases}
$$

Estas ecuaciones son ejemplos inmediatos de Ecuaciones de tipo Hiperbólica, Parabólica y Elíptica, respectivamente.

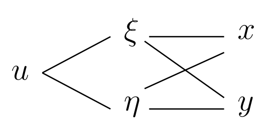
Teorema

La E.D.P. (1) es reducible en Ω a la forma:

1) Hiperbólica si y sólo si $b(x,y)^2 - a(x,y)c(x,y) > 0$, $\forall (x,y) \in \Omega$
2) Parabólica si y sólo si $b(x,y)^2 - a(x,y)c(x,y) = 0$, $\forall (x,y) \in \Omega$
3) Elíptica si y sólo si $b(x,y)^2 - a(x,y)c(x,y) < 0$, $\forall (x,y) \in \Omega$

Demostración

Sea $\Delta : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\Delta(x,y) = b(x,y)^2 - a(x,y)c(x,y)$. Demostraremos en primer lugar que en Ω, el signo del discriminante $\Delta(x,y)$ es invariante bajo un cambio de coordenadas del tipo (2). Por (2) es inmediato que existe una cadena de dependencia de las variables del tipo:



Usando la Regla de la Cadena y cambiando de notación se obtiene que las derivadas parciales respecto de x e y, estan dadas por las expresiones:

$$\begin{cases} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \\ u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\eta_x\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + T.O.I. \\ u_{xy} &= u_{\xi\xi}\xi_y\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_y\xi_x + u_{\eta\xi}\xi_y\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + T.O.I. \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\eta_y\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + T.O.I. \end{cases}$$

Reemplazando las derivadas parciales anteriores en (1) se obtiene que la forma general de la Ecuación Parcial en las cordenadas (ξ, η) es del tipo

$$Au_{\xi\xi} + 2Bu_{\xi\eta} + Cu_{\eta\eta} + T.O.I. = 0 \tag{4}$$

donde los coeficientes de las derivadas de segundo orden están dadas por:

$$\begin{cases} A &= a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 \\ B &= a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y \\ C &= a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 \end{cases} \tag{5}$$

Con un cálculo operatorio simple se verifica la identidad:

$$B^2 - AC \equiv (b^2 - ac)(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x)^2 \equiv (b^2 - ac)\left[\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right]^2$$

La identidad anterior, demuestra que el signo de la expresión $\Delta = b^2 - ac$ es invariante bajo cambio de coordenadas pues

$$Sing(B^2 - AC) = Sing(b^2 - ac) \text{ si y sólo si } \left[\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right]^2 \neq 0$$

($\Rightarrow$). Es inmediato de (3) que las Formas Normales : Hiperbólica, Parabólica y Elíptica implican, respectivamente: $\Delta(x,y) \equiv 1(\text{resp. } \frac{1}{4}), \Delta(x,y) \equiv 0$ y $\Delta(x,y) \equiv -1$, de donde los signos de $\Delta(x,y)$ en Ω son positivos, cero y negativo ya que son invariantes bajo cambio de coordenadas.

($\Leftarrow$) Demostraremos a continuación que dependiendo del signo de Δ , existe un cambio de coordenadas (2) que transforma (1) a una de las respectivas Formas Normales en (3).

Caso 1.- Supongamos que $\Delta(x,y) > 0$ en Ω y busquemos funciones $\xi = \xi(x,y), \eta = \eta(x,y)$ tales que anulen simultaneamente las expresiones de A y C en (5). Si tales funciones existen entonces $B \neq 0$ en (5) pues $B^2 - AC > 0$ y dividiendo (4) por $\frac{1}{2B}$ se tiene la Forma Normal 1.b) de (3).

La demostración se reduce a analizar la consistencia del sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\left.\begin{array}{rcl} a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 &=& 0 \\ a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 &=& 0 \end{array}\right| \tag{6}$$

Como las ecuaciones del sistema son similares, el estudio de la primera de ellas es válido para la segunda ecuación cambiando el rol de ξ por η.

La primera ecuación del sistema, dividida por ξ_y^2 tiene la forma

$$a\left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right)^2 + 2b\frac{\xi_x}{\xi_y} + c = 0 \tag{7}$$

Si $a \neq 0$ en cada punto de Ω, se tiene una ecuación de segundo grado donde el cuociente $\frac{\xi_x}{\xi_y}$ juega el rol de incógnita. Sus soluciones son:

$$\frac{\xi_x}{\xi_y} = \frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{a} \quad \text{, o bien,} \quad \frac{\xi_x}{\xi_y} = \frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{a}$$

Sean las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b-\sqrt{b^2-ac}}{a} \quad \text{, y ,} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{a} \tag{8}$$

Si $\xi(x,y) = cte$ es una solución general de la segunda ecuación anterior, entonces es inmediato que $\xi_x dx + \xi_y dy = 0$ y en consecuencia $\frac{dy}{dx} = -\frac{\xi_x}{\xi_y}$, de donde el cuociente $\frac{\xi_x}{\xi_y}$ es solución de la ecuación de segundo grado (7) y la función ξ satisface la primera ecuación del sistema (6). Analogamente si $\eta(x,y) = cte$ es solución general de la primera ecuación de (8), entonces la función η satisface la segunda ecuación del sistema (6).

Para demostrar que la transformación

$$\begin{cases} \xi &= \xi(x,y) \\ \eta &= \eta(x,y) \end{cases}$$

define un cambio coordenadas en Ω, basta demostrar que el jacobiano de la transformación no se anula en Ω. En efecto las funciones ξ y η, por (7) y (8) satisfacen

$$\begin{cases} -\frac{\xi_x}{\xi_y} &= \frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{a} \\ -\frac{\eta_x}{\eta_y} &= \frac{b-\sqrt{b^2-ac}}{a} \end{cases}$$

Luego

$$\frac{\xi_x}{\xi_y} - \frac{\eta_x}{\eta_y} = -2\frac{\sqrt{b^2-ac}}{a} \neq 0 \text{ , de donde, } \frac{\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x}{\xi_y\eta_y} \neq 0$$

Entonces, $\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x = \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \neq 0$, $\forall x, y \in \Omega$

Si $a \equiv 0$, entonces $b(x,y) \neq 0$ en cada punto de Ω pues por hipótesis $\Delta(x,y) > 0$. Si $c \equiv 0$, basta dividir (1) por $2b$ para tener la forma normal de la ecuación diferencial. Sea entonces $c(x,y) \neq 0$ en cada punto de Ω. El sistema (6) se reduce a la expresión

$$\left.\begin{array}{rcl} 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 &=& 0 \\ 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 &=& 0 \end{array}\right|$$

Dividiendo la primera ecuación del sistema por ξ_x^2 se tiene la ecuación de segundo grado con incógnita el cuociente $\frac{\xi_y}{\xi_x}$;

$$2b\frac{\xi_y}{\xi_x} + c(\frac{\xi_y}{\xi_x})^2 = 0$$

o bien factorizando ,

$$\frac{\xi_y}{\xi_x}(2b + c\frac{\xi_y}{\xi_x}) = 0$$

Sus soluciones son :

$$\frac{\xi_y}{\xi_x} = 0 \ \text{, o bien ,} \ \frac{\xi_y}{\xi_x} = -\frac{2b}{c}$$

Sean las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dx}{dy} = 0 \ \text{, y ,} \ \frac{dx}{dy} = \frac{2b}{c}$$

Sean $x = cte$, y , $\eta(x,y) = cte$ las respectivas soluciones generales de las ecuaciones ordinarias, entonces

$$\begin{cases} \xi &= x \\ \eta &= \eta(x,y) \end{cases}$$

satisface el sistema (6). El sistema como una transformación define un cambio de coordenadas pues $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial\eta}{\partial y} \neq 0$, ya que, $b \neq 0$. Lo anterior demuestra sólo la parte 1) del Teorema.

Caso 2.- Supongamos que $\Delta(x,y) \equiv 0$ en Ω. Análogamente a lo anterior busquemos ahora funciones $\xi = \xi(x,y), \eta = \eta(x,y)$ tales que anulen simultaneamente las expresiones de A y B en (5).

Si $a \equiv 0$ en (1) entonces $b \equiv 0$ pues $b^2 - ac \equiv 0$, luego $c \neq 0$ en cada punto de Ω. Basta dividir (1) por c para tener la forma Parabólica 2.b).

Si $a \neq 0$ en cada punto de Ω en (1), del **caso 1.-** se sabe que la función $\xi = \xi(x,y)$ obtenida de la segunda ecuación diferencial en (8), (que se reduce a la forma más simple $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$), tiene la propiedad de anular la expresión de A . Pero $B^2 - AC \equiv 0$ pues el $sig(\Delta(x,y))$ es invariante bajo cambios de coordenadas, entonces la misma función $\xi = \xi(x,y)$ anterior, tambien anula B. Por otro lado basta tomar $\eta(x,y) = y$ ya que en el caso $c \neq 0$ en cada punto de Ω, no anula la expresión de C (si $c \equiv 0$ el teorema es inmediato pues (1) dividida por a se encuentra en la forma normal Parabólica 2.b))

Para terminar la demostración de este caso falta demostrar que la transformación definida por el sistema:

$$\begin{cases} \xi &= \xi(x,y) \\ \eta &= y \end{cases} \quad \text{, define un cambio de coordenadas en } \Omega.$$

Pero

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \xi_x \quad , \quad \text{y} \quad -\frac{\xi_x}{\xi_y} = \frac{b}{a}$$

Si $b \equiv 0$ en Ω, entonces $c \equiv 0$ y la demostración es inmediata pues basta dividir (1) por a para tener la forma normal Parabólica 2.b).

Si $b \neq 0$ en cada punto de Ω, entonces $\xi_x \neq 0$ y el Jacobiano anterior no se anula en Ω lo que termina la demostración del caso 2.-.

Caso 3.- Supongamos que $\Delta(x,y) < 0$ en Ω. Busquemos funciones $\xi = \xi(x,y), \eta = \eta(x,y)$ tales que simultaneamente anule la expresiones de B y se tenga la identidad $A \equiv C$ en (5). Entonces de (5) y de las identidades en Ω, $A - C \equiv 0$ y $B \equiv 0$ se tiene respectivamente el sistema:

$$(9) \qquad \begin{cases} a(\xi_x^2 - \eta_x^2) + 2b(\xi_x\xi_y - \eta_x\eta_y) + c(\xi_y^2 - \eta_y^2) & = & 0 \\ a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y & = & 0 \end{cases}$$

Multiplicando la segunda ecuación del sistema por $2i$ y sumando con la primera se obtiene:

$$a(\xi_x + i\eta_x)^2 + 2b(\xi_x + i\eta_x)(\xi_y + i\eta_y) + c(\xi_y + i\eta_y)^2 = 0$$

Dividiendo la ecuación por $(\xi_y + i\eta_y)^2$ se tiene:

$$a(\frac{\xi_x + i\eta_x}{\xi_y + i\eta_y})^2 + 2b(\frac{\xi_x + i\eta_x}{\xi_y + i\eta_y}) + c = 0$$

Esta expresión significa que el cuociente $\frac{\xi_x + i\eta_x}{\xi_y + i\eta_y}$ es solución de la ecuación de segundo grado $aX^2 + 2bX + c = 0$, es decir,

$$(10) \qquad \frac{\xi_x + i\eta_x}{\xi_y + i\eta_y} = \frac{-b - i\sqrt{ac - b^2}}{a}$$

Nótese que $a \neq 0$ en cada punto de Ω pues $b^2 - ac < 0$ (el caso $a = 0$ no es posible pues $b^2 < 0$ es una contradicción .)

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b + i\sqrt{ac - b^2}}{a} \quad , \quad \text{y sea} \ , \ \Phi(x,y) = \xi(x,y) + i\eta(x,y) = c_1 + ic_2 \in \mathbb{C}$$

su solución general, donde $c_1 + ic_2$ es una constante compleja arbitraria.

Pero la diferencial de $\Phi(x,y) = cte$ es $d\Phi = \Phi_x dx + \Phi_y dy = 0$, entonces $\frac{dy}{dx} = -\frac{\Phi_x}{\Phi_y}$ y en consecuencia se tiene (10).

El cálculo anterior significa que las funciones

$$(11) \qquad \begin{cases} \xi & = & \xi(x,y) \\ \eta & = & \eta(x,y) \end{cases}$$

satisfacen el sistema (9) y en consecuencia $A - C \equiv B \equiv 0$.

Falta demostrar que el sistema (11) define una transformación que es un cambio de coordenadas, o bien , que $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \neq 0$ en cada punto de Ω.

Consideremos la parte imaginaria

$$Im(\frac{\xi_x + i\eta_x}{\xi_y + i\eta_y}) = \frac{\xi_y\eta_x - \xi_x\eta_y}{\xi_y^2 + \eta_y^2} = -\frac{\sqrt{ac - b^2}}{a} \neq 0 \quad , \quad \text{en cada punto de } \ \Omega$$

Entonces

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x \neq 0 \quad , \quad \text{en cada punto de } \ \Omega$$

lo que concluye la demostración.

Comentario 1. El teorema anterior se generaliza a E.D.P. lineales de segundo orden definidas en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Por cambios de coordenadas la forma general de la E.D.P. se puede escribir en la forma normal

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i^2} + T.O.I. = 0 \quad , \quad \text{y se tiene la siguiente clasificación :}$$

1)	Elíptica	$\Leftrightarrow$	$\forall i, \lambda_i > 0$ (resp. $\lambda_i < 0$)
2)	Parabólica	$\Leftrightarrow$	$\exists i, \lambda_i = 0$
3)	Hiperbólica	$\Leftrightarrow$	$(\exists!)i, \lambda_i > 0$ (resp. $\lambda_i < 0$) , $\lambda_j < 0$ (resp. $\lambda_j > 0$) si $i \neq j$
4)	Ultrahiperbólica	$\Leftrightarrow$	Existe más de un $\lambda_i > 0$ y más de un $\lambda_i < 0$

Comentario 2. Sea la función asociada a una misma E.D.P. de la forma (1)

$$\Delta : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \text{ tal que , } \ \Delta(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y)$$

Consideremos la partición de Ω en los tres conjuntos

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \ \text{ donde } \ \Omega_1 = \Delta^{-1}(-\infty, 0), \Omega_2 = \Delta^{-1}(0) \text{ y } \Omega_3 = \Delta^{-1}(0,\infty)$$

Entonces, una misma ecuación puede ser de los tres tipos: Elíptica , Parabólica, o bien, Hiperbólica si se restringe a los conjuntos Ω_1, Ω_2 , o bien , Ω_3 respectivamente. Es decir, el tipo de ecuación depende del dominio de definición de los coeficientes de la E.D.P.

Ejercicio interesante

Encontrar la solución de la ecuación de Onda Unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{donde } \ k > 0 \ \text{ es una constante,}$$

tal que satisfaga las condiciones iniciales de Cauchy:

$$\left.\begin{array}{rcl} u(x,0) & = & f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = & g(x) \end{array}\right| \quad \text{con } \ f, g \in C^1 \tag{12}$$

Solución: Si el coeficiente $k \neq 1$ en la ecuación de Onda, entonces dicha ecuación no está escrita en forma normal por la presencia de este coeficiente diferente de uno .

Es inmediato que, $\Delta(x,y) = b^2 - ac = k^2 > 0$ y en consecuencia la ecuación de Onda es de tipo Hiperbólico.

Sean las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dt}{dx} = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{1}{k} \quad , \quad \frac{dt}{dx} = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a} = -\frac{1}{k}$$

Entonces las respectivas soluciones generales son:

$$x - kt = c_1 \quad , \quad x + kt = c_2 \quad \text{, donde} \quad c_1, c_2 \ \text{ son constantes arbitrarias.}$$

Luego existe el cambio de coordenadas

$$\left.\begin{array}{rcl} \xi & = & x - kt \\ \eta & = & x + kt \end{array}\right| \text{ ,donde la Ec. de Onda es de la forma Hiperbólica}$$

De (5) se tiene que $B = 2k^2$ y la ecuación en las nuevas coordenadas es de la forma $2B\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + T.O.I = 0$. Es simple verificar que los términos $T.O.I \equiv 0$, dividiendo la ecuación anterior por $4k^2$ se tiene la forma hiperbólica $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0$. Es claro que cualquier función que depende sólo de unas de las variables es anulada por la derivada mixta (se supone de clase C^2). Entonces

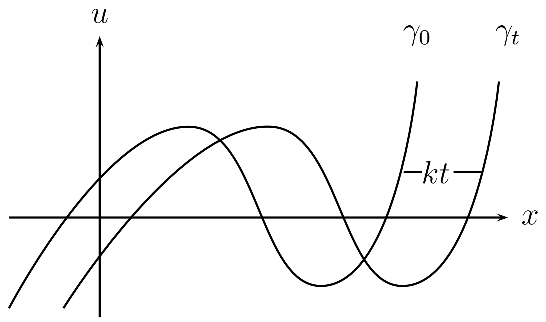
$$u = \phi(\xi) + \psi(\eta) \quad , \quad \text{con} \quad \phi, \psi \in C^2 \ \text{ funciones arbitrarias}$$

son soluciones de la forma hiperbólica. En consecuencia, regresando a las variables originales por el cambio de coordenadas ,

$$u(x,t) = \phi(x - kt) + \psi(x + kt) \tag{13}$$

son soluciones arbitrarias de la ecuación de Onda.

Consideremos la siguiente interpretación de la solución $u = \phi(x-kt)$. Supongamos que la gráfica de ϕ en el instante inicial $t = 0$ es como la curva γ_0 de la figura. Entonces la gráfica de $u = \phi(x - kt)$ es una curva dinámica γ_t que como función del tiempo, se desplaza $s = kt$ unidades hacia la derecha a velocidad k, pues $kt > 0$. Análogamente la gráfica de $\psi(x + kt)$ es una curva que como función del tiempo se desplaza $s = kt$ unidades a velocidad k hacia la izquierda pues $-kt < 0$. Por estas interpretaciones , se dice que las soluciones de la ecuación de Onda, $u(x,t) = \phi(x - kt) + \psi(x + kt)$ son sumas de ondas viajeras como indica la figura:



Busquemos ahora las funciones ϕ, ψ tales que la(s) solución(es) satisface(en) las condiciones iniciales de Cauchy, es decir, la(s) solución(es) satisfacen las condiciones (12), entonces tomando $t = 0$ en (13) se tiene que ϕ, ψ satisfacen el sistema:

$$\begin{cases} f(x) &= \phi(x) + \psi(x) \\ g(x) &= -k\phi'(x) + k\psi'(x) \end{cases}$$

Derivando la primera ecuación del sistema anterior respecto de x se tiene que las derivadas de ϕ, ψ satisfacen el sistema:

$$\begin{array}{rcl|} \phi'(x) + \psi'(x) &=& f'(x) \\ -k\phi'(x) + k\psi'(x) &=& g(x) \\ \hline \end{array}$$

Despejando del sistema las derivadas de ϕ, ψ tenemos:

$$\begin{cases} \phi'(x) &= \frac{kf'(x)-g(x)}{2k} \\ \psi'(x) &= \frac{kf'(x)+g(x)}{2k} \end{cases}$$

Integrando respecto de x se tiene las identidades:

$$\begin{cases} \phi(x) &\equiv \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2k}\int_0^x g(\xi)d\xi \\ \psi(x) &\equiv \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2k}\int_0^x g(\xi)d\xi \end{cases}$$

Reemplazando $x \to x - kt$ y $x \to x + kt$ en la primera y segunda identidad respectivamente se obtiene

$$\begin{cases} \phi(x-kt) &\equiv \frac{f(x-kt)}{2} - \frac{1}{2k}\int_0^{x-kt} g(\xi)d\xi \\ \psi(x+kt) &\equiv \frac{f(x+kt)}{2} + \frac{1}{2k}\int_0^{x+kt} g(\xi)d\xi \end{cases}$$

Finalmente, sumando las dos identidades anteriores encontramos la solución llamada de D'Alambert del problema de la Ecuación de Onda con condiciones iniciales de Cauchy.

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+kt) + f(x-kt)] + \frac{1}{2k}\int_{x-kt}^{x+kt} g(\xi)d\xi}$$

RESUMEN

Caso 1.-

$b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) > 0, \forall (x,y) \in \Omega \Longleftrightarrow$ E.D.P. Hiperbólica.

i) Si $a \neq 0$, sean las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

y las respectivas soluciones generales : $\begin{cases} \xi(x,y) &= c_1 \\ \eta(x,y) &= c_2 \end{cases}$

Entonces el cambio de coordenadas:

$$\begin{cases} \xi &= \xi(x,y) \\ \eta &= \eta(x,y) \end{cases} \quad , \text{ Transforma (1) a la forma } , \; 2B\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + T.O.I. = 0$$

Dividiendo la expresión anterior por $2B$, se obtiene la Forma Normal Hiperbólica,

(14)
$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + T.O.I. \quad = 0}$$

ii) Si $a = 0$ y $c \neq 0$, en cada punto de Ω , sean las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias:

$$\frac{dx}{dy} = 0 \quad , \quad \frac{dx}{dy} = \frac{2b}{c}$$

y las respectivas soluciones generales : $\begin{cases} x &= c_1 \\ \eta(x,y) &= c_2 \end{cases}$

Entonces el cambio de coordenadas:

$$\begin{cases} \xi &= x \\ \eta &= \eta(x,y) \end{cases} \quad , \text{ Transforma (1) a la forma } , \; 2B\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + T.O.I. = 0$$

Dividiendo la expresión anterior por $2B$, se obtiene la Forma Normal Hiperbólica ().

iii) Si $a = 0$ y $c = 0$, en cada punto de Ω, basta dividir (1) por $2b$ para obtener la Forma Normal Hiperbólica en las coordenadas cartesianas originales,

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + T.O.I. \quad = 0}$$

Caso 2.-

$b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) \equiv 0, \forall (x,y) \in \Omega \Longleftrightarrow$ E.D.P. Parabólica.

i) Si $a = 0$, en cada punto de Ω , basta dividir (1) por c para obtener la Forma Normal Parabólica en las coordenadas cartesianas originales,

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + T.O.I. \quad = 0}$$

ii) Si $a \neq 0$ y $c \neq 0$, en cada punto de Ω, sea la Ecuación Diferencial Ordinaria

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \quad ,$$

y la respectiva solución general: $\xi(x,y) \; = \; c_1$

Entonces el cambio de coordenadas:

$$\left\{\begin{array}{lcl}\xi & = & \xi(x,y) \\ \eta & = & y\end{array}\right. \quad , \text{ Transforma (1) a la forma } , \; C\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + T.O.I. = 0$$

Dividiendo la expresión anterior por C , se obtiene la Forma Normal Hiperbólica ,

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + T.O.I. \quad = 0}$$

iii) Si $a \neq 0$ y $c = 0$, en cada punto de Ω, basta dividir (1) por a para obtener la Forma Normal Parabólica en las coordenadas cartesianas originales,

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + T.O.I. \quad = 0}$$

Caso 3.-

$b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) < 0, \forall (x,y) \in \Omega \Longleftrightarrow$ E.D.P. Elíptica.

Sea la Ecuación Diferencial Ordinaria:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b + i\sqrt{ac - b^2}}{a} \qquad ,$$

y la respectiva solución general : $\Phi(x,y) = \xi(x,y) + i\eta(x,y) = c_1 + ic_2 \in \mathbb{C}$

Entonces el cambio de coordenadas:

$$\left\{\begin{array}{lcl}\xi & = & \xi(x,y) \\ \eta & = & \eta(x,y)\end{array}\right. \quad , \text{ Transforma (1) a la forma } , \; A\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + A\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + T.O.I. = 0$$

Dividiendo la expresión anterior por A , se obtiene la Forma Normal Elíptica,

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + T.O.I. \quad = 0}$$

Ejercicios propuestos:

1) Clasificar y reducir a su forma normal:

$$\begin{array}{lrcl} i) & u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x - u_y & = & 0 \\ ii) & u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} + 3u_x + u & = & 0 \\ iii) & y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3x^2 u_{yy} & = & \frac{y^2}{x} u_x - 3\frac{x^2}{y} u_y \\ iv) & x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} & = & 0 \end{array}$$

2) Demostrar que términos de primer orden de una E.D.P., se pueden anular bajo la sustitución: $u = ve^{Ax+By}$.

3) Sea la ecuación de Onda Unidimensional con condiciones de Cauchy:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} &=& 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad -\infty < x < \infty \\ u(0,x)=0 \quad , && \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=x \quad , \quad -\infty < t < \infty \end{array}$$

(i) **Resolver el problema de Cauchy**.
(ii) En el plano xu, **haga un bosquejo** de las ondas del problema para los instantes $t=0$ y $t=1$, respectivamente.
(iii) ¿ Tiende la onda del problema a una posición determinada cuando $t \to \infty$?.

4) Cuál es la solución de la E.D.P.

$$u_{xx} - u_{yy} = 3x^2 - 2y$$

tal que satisface las condiciones: $\begin{cases} u(x,0) &= \frac{1}{4}x^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) &= x \end{cases}$

5) Sea $u = u(x,t)$ y considere la E.D.P.

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad , \quad x \neq 0 \quad , \quad c > 0.$$

i) Introduzca en la E.D.P. la sustitución $v(x,t) = xu(x,t)$.
ii) Escribir la E.D.P. obtenida en i) en su forma normal.
ii) Encontrar la solución de la E.D.P planteada, tal que satisface las condiciones iniciales de Cauchy: $\begin{cases} u(x,0) &= x \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= 2c. \end{cases}$

6) Sea la ecuación de Onda Unidimensional

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad , \text{ con } \quad -\infty < x < \infty \quad , \quad t > 0$$

i) ¿ Cuál es la solución que satisface las condiciones iniciales de Cauchy ?

$$\left.\begin{array}{rcl} z(x,0) &=& 1 - x^2 \\ \frac{\partial z}{\partial t}(x,0) &=& 0 \end{array}\right|$$

ii) En el plano xz haga un bosquejo de la solución para $t=0$ y $t=1$.
iii) En el plano xz. ¿ Para qué tiempo $t>0$ la solución encontrada en i) pasa por el punto $(x,z) = (0,-4)$?. Haga un bosquejo de la onda.
iv) ¿ Existe algun instante t tal que la solución encontrada en i) pasa, en el plano xz, por el punto $(x,z) = (1, \frac{1}{2})$.

7) Sea el problema de Cauchy

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \; ; \qquad\qquad x,t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x \in [0,\pi] \\ 0 & \text{si otro caso} \end{cases} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \equiv 0 \end{array} \right.$$

Haga un bosquejo en el plano ux, de la onda solución del problema, en el instante $t = \pi$.

8) Sea la E.D.P.: $3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \ , \ -\infty \leq x, t \leq \infty$

i) Encontrar una solución general de la E.D.P.

ii) Resolver el problema de Cauchy: $\left.\begin{array}{rcl} u(x,0) & = & f(x) \quad , f \in C^1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = & g(x) \quad , g \in C^0 \end{array}\right|$

Indicación: Aplique las ideas que se usaron para deducir la solución de D'Alambert.

References

[1] A. R. Castro F. *Curso básico de ecuaciones en derivadas parciales* . Addison-Wesley Iberoamericana . Wilmington, Delaware. E.U.A. 1997.

[2] I. Peral A. *Primer curso de ecuaciones en derivadas parciales* . Addison-Wesley / Universidad Autónoma de Madrid. Wilmington, Delaware. E.U.A. 1995.